

仿射空间中的抛物型螺旋面

于延华, 彭兰兰, 贾琨
(东北大学理学院, 辽宁沈阳 110819)

摘 要: 螺旋面是由一条平面曲线绕固定轴旋转的同时, 沿轴的方向作匀速平移产生的曲面. 由于旋转轴类型的不同, 螺旋面可以分为椭圆型、双曲型和抛物型三种情况. 在三维仿射空间中, 利用 Blaschke 度量研究抛物型螺旋面, 并对高斯曲率为零和平均曲率为零的抛物型螺旋面分别进行了分类. 当符距 $h=0$ 时, 螺旋运动退化为旋转运动, 在此情况下, 进一步分类了平坦和极小的抛物型旋转曲面, 并得出此时抛物型旋转曲面所满足的方程, 最后画出其相应的图像.

关 键 词: 仿射空间; 抛物型螺旋面; 平坦; Blaschke 度量; 极小曲面

中图分类号: O 186 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2020)12-1800-05

Parabolic Helicoidal Surfaces in Affine Spaces

YU Yan-hua, PENG Lan-lan, JIA Kun

(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: JIA Kun, E-mail: 1458326297@qq.com)

Abstract: Helicoidal surface is a surface formed by a plane curve that rotates around a fixed axis while uniformly shifting along the direction of the axis. Helicoidal surface can be divided into elliptic, hyperbolic and parabolic types based on different rotation axis. The helicoidal surface of parabolic type is studied by using Blaschke metric in affine spaces. The helicoidal surfaces of parabolic type whose Gaussian curvature and mean curvature vanish identically have been classified, respectively. When $h=0$, the helical motion degrades into rotational motion. In this situation, the flat and minimal parabolic surfaces of revolution are also classified. Finally, some graphs of those surfaces are given.

Key words: affine space; parabolic helicoidal surface; flat; Blaschke metric; minimal surface

存在性问题是微分几何研究的重要问题之一, 因此确定具有某种特征的曲面或子流形是一项非常有意义的工作. 在三维欧氏空间中, 学者们对曲线及曲面进行了广泛研究. 仿射微分几何是微分几何的一个重要分支, 它主要研究仿射空间中非退化的超曲面在么模仿射变换下不变的性质. 螺旋面是微分几何中一类重要的曲面, 文献[1-2]在三维闵可夫空间中研究了椭圆型、双曲型、抛物型的螺旋面, 并对具有常高斯曲率和常平均曲率的螺旋面进行分类, 最后给出了抛物型螺旋面的几何意义.

本文利用 Blaschke 度量研究三维仿射空间中的抛物型螺旋面, 对平坦的和极小的抛物型螺旋面

进行了分类. 更进一步对符距为零的螺旋运动下极小的和平坦的抛物型旋转曲面进行了分类.

1 预备知识

在仿射变换下, Berwald - Blaschke 度量是一种与坐标系的选择无关的、不变的二次形式. 令 $\Phi(u, v): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ 为三维仿射空间中的一个正则曲面, 则 Berwald - Blaschke 度量可定义为

$$ds^2 = \frac{L}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}} du^2 + \frac{2M}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}} dudv + \frac{N}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}} dv^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

其中：

$$L=|\Phi_u\quad\Phi_v\quad\Phi_{uv}|,M=|\Phi_u\quad\Phi_v\quad\Phi_{uv}|,N=|\Phi_u\quad\Phi_v\quad\Phi_{vv}|,\Phi_u=\frac{\partial\Phi}{\partial u},\Phi_v=\frac{\partial\Phi}{\partial v},\Phi_{uv}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2},\Phi_{uv}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v},\Phi_{vv}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}.E,F,G\text{ 为度量系数.}$$

本文假定 $LN-M^2\neq 0$ 且曲面为非退化的.曲面上满足 $LN-M^2>0$ 的点称为椭圆点,满足 $LN-M^2<0$ 的点称为双曲点.不失一般性,本文只研究椭圆点的情况^[3-4].

本文选取如下绕类光轴旋转的抛物型旋转矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\v&1&0\\v^2/2&v&-1\end{bmatrix}.$$

2 基本概念

主要介绍仿射空间中的余法向量、法向量、高斯曲率、平均曲率^[5-8]等基本概念.

定义 1 已知 X 是由 $\Phi:\Omega\subset\mathbf{R}^2\rightarrow X\subset\mathbf{R}^3$ 所确定的正则曲面,则 X 的仿射余法向量场定义为

$$\eta=\frac{\Phi_u\times\Phi_v}{(LN-M^2)^{\frac{1}{4}}}=\frac{\Phi_u\times\Phi_v}{|\eta,\eta_u,\eta_v|}.$$

定义 2 已知 X 是由 $\Phi:\Omega\subset\mathbf{R}^2\rightarrow X\subset\mathbf{R}^3$ 所确定的正则曲面,则 X 的仿射法向量场定义为

$$\zeta=\frac{\eta_u\times\eta_v}{|\eta,\eta_u,\eta_v|}=\frac{1}{2}\frac{(LN-M^2)^{\frac{1}{4}}}{(LN-M^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N\Phi_u-M\Phi_v}{(LN-M^2)^{\frac{1}{2}}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L\Phi_v-M\Phi_u}{(LN-M^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}}\times\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\Phi_u-F\Phi_v}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\Phi_v-F\Phi_u}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right).$$

其中： $\eta\cdot\zeta=1;\zeta\cdot\eta_u=0;\eta_v\cdot\zeta=0$.

定义 3 已知 P 为正则曲面 X 上的一点,则 P 点的形状算子 $S:T_pX\rightarrow T_pX$, 定义为 $S_p(V)=-D_v\zeta$, 其中 T_pX 表示 P 点的切空间, $V\in T_pX$.

由 $\eta_u,\eta_v\in T_pX$ 可知, η_u,η_v 可由 Φ_u,Φ_v 线性表示：

$$\begin{cases}\zeta_u=b_{11}\Phi_u+b_{12}\Phi_v,\\ \zeta_v=b_{21}\Phi_u+b_{22}\Phi_v.\end{cases}$$

其中：

$$b_{11}=\frac{|\zeta_u,\Phi_v,\zeta|}{|\eta,\eta_u,\eta_v|};b_{12}=\frac{|\Phi_u,\zeta_u,\zeta|}{|\eta,\eta_u,\eta_v|};b_{21}=\frac{|\zeta_v,\Phi_v,\zeta|}{|\eta,\eta_u,\eta_v|};b_{22}=\frac{|\Phi_u,\zeta_v,\zeta|}{|\eta,\eta_u,\eta_v|}.$$

则曲面 X 的仿射高斯曲率、仿射平均曲率可表示为

$$K=b_{11}b_{22}-b_{12}^2,H=\frac{1}{2}(b_{11}+b_{22}).$$

定义 4 设 $\Phi(u,v):\Omega\subset\mathbf{R}^2\rightarrow\mathbf{R}^3$ 为三维仿射空间中的螺旋面,则抛物型螺旋面有如下表示^[9-10]：

$$\Phi(u,v)=(u,uv,\frac{1}{2}uv^2+\phi(u)+hv). \quad (1)$$

当符距 $h=0$ 时,螺旋运动退化为旋转运动,可得如下抛物型旋转曲面：

$$\psi(u,v)=(u,uv,\frac{1}{2}uv^2+\phi(u)). \quad (2)$$

下文中 $C_i,i=1,2,\cdots$ 表示实常数.

3 主要内容

3.1 平坦和极小的抛物型螺旋面

定理 1 设 Φ 为三维仿射空间中具有式(1)的抛物型螺旋面,则其仿射高斯曲率、仿射平均曲率分别为

$$K=(u^3\phi''+h^2)^{-\frac{1}{2}}(5u^6\phi''^2+52h^2u^3\phi''+2u^7\phi''\phi'''-44h^2u^4\phi'''-7u^8\phi''^2-16h^4-4h^2u^5\phi^{(4)}+4u^8\phi''\phi^{(4)})\times(u^3\phi''-u^4\phi'''-4h^2)(4u^6\phi''^2-8u^3h^2\phi''+4h^4),\\ H=-\frac{1}{32}(-u^3\phi''+h^2)^{-\frac{11}{4}}((u^3\phi''+20h^2+7u^4\phi''')\times(u^3\phi''-u^4\phi''')-4h^2(13u^3\phi''+8h^2+u^4\phi''')-4u^5\phi^{(4)}(-u^3\phi''+h^2)).$$

证明 直接计算可得

$$\Phi_u=(1,v,\frac{1}{2}v^2+\phi'(u)),\Phi_v=(0,u,uv+h),\\ \Phi_{uu}=(0,0,\phi''),\Phi_{uv}=(0,1,v),\Phi_{vv}=(0,0,u),\\ L=u\phi'',M=-h,N=\sqrt[4]{u^3\phi''-h^2}.$$

度量系数为

$$E=\frac{u\phi''}{\sqrt[4]{u^3\phi''-h^2}},G=\frac{u^2}{\sqrt[4]{u^3\phi''-h^2}},F=\frac{h^2}{\sqrt[4]{u^3\phi''-h^2}}.$$

曲面的余法向量为

$$\eta=\frac{1}{\sqrt[4]{u^3\phi''-h^2}}\left(\frac{1}{2}uv^2+vh-u\phi',-uv-h,u\right).$$

曲面的法向量为

$$\zeta=\frac{1}{4}(u^3\phi''-h^2)^{-\frac{7}{4}}[u^4\phi''-u^5\phi'''-4uh^2,\\ (uv+h)\times(u^3\phi''-u^4\phi'''-4h^2),4u^5\phi''^2-\\ \phi'''(u^5\phi'+u^3h^2)+\phi''(u^4\phi'-7u^2h^2)-4uh^2\phi'+\\ v(u^3\phi''h-u^4h\phi'''-4h^3)+\\ v^2(\frac{1}{2}u^4\phi''-\frac{1}{2}u^5\phi'''-2uh^2)]= (A,B,C).$$

进一步计算可得

$$\begin{aligned} \zeta_u = & \frac{1}{4}(u^3\phi''-h^2)^{-\frac{7}{4}}[4u^3\phi''-4u^4\phi'''-u^5\phi^{(4)}- \\ & 4h^2,v(4u^3\phi''-4u^4\phi'''-u^5\phi^{(4)}-4h^2)+ \\ & h(3u^2\phi''-3u^3\phi'''-u^4\phi^{(4)}),21u^4\phi''^2-\phi^{(4)}(u^5\phi'+u^3h^2)+ \\ & \phi'''(7u^5\phi''-4u^4\phi'-10u^2h^2)+\phi''(-18uh^2+4u^3\phi')- \\ & 4h^2\phi'+v(3u^2h\phi''-3u^3h\phi'''-u^4h\phi^{(4)})+ \\ & v^2(2u^3\phi''-2u^4\phi'''-\frac{1}{2}u^5\phi^{(4)}-2h^2)]= (D,E,F), \\ \zeta_v = & \frac{1}{4}(u^3\phi''-h^2)^{-\frac{7}{4}}(0,u^4\phi''-u^5\phi'''-4uh^2, \\ & (uv+h)(u^3\phi''-u^4\phi'''-4h^2)). \end{aligned}$$

即可得

$$H=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}(u^3\phi''-h^2)^{-\frac{15}{4}}\left\{\begin{vmatrix} D & E & F \\ 0 & u & uv+h \\ A & B & C \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & v & \frac{1}{2}v^2+\phi' \\ 0 & A & B \\ A & B & C \end{vmatrix}\right\}.$$

化简可得仿射平均曲率. 同理可得仿射高斯曲率的表达式,定理即得证.

定理 2 设 Φ 为三维仿射空间中具有表达式(1)的抛物型螺旋面,则仿射高斯曲率为零时,曲面为以下三种形式之一:

- ① $\Phi(u,v)=(u,uv,\frac{1}{2}uv^2+\frac{1}{2}h^2u^{-1}+\frac{1}{6}C_1u^3+C_2u+hv+C_3)$.
- ② $\Phi(u,v)=(u,uv,\frac{1}{2}uv^2+\frac{1}{2}h^2u^{-1}+C_4u+hv+C_5)$.
- ③ 曲面表达式中 $\phi(u)$ 的数值解如图 1 所示.

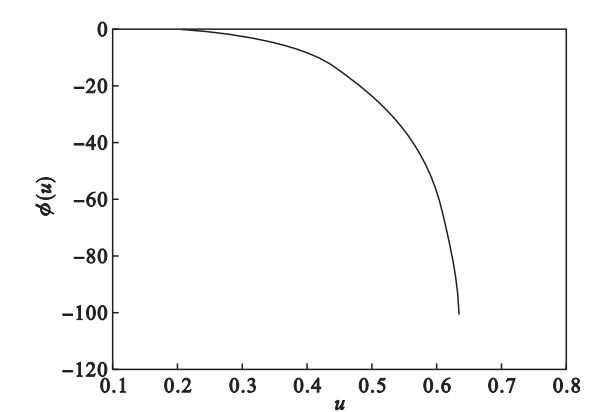


图 1 曲面③中 $\phi(u)$ 的数值解
Fig. 1 The numerical solution to $\phi(u)$ in surfaces ③

此时曲面的数值解图像如图 2 所示.
证明 令 $K=0$,则
 $(5u^6\phi''^2+52h^2u^3\phi''+2u^7\phi''\phi'''-44h^2u^4\phi''' -$

$$7u^8\phi'''^2-16h^4-4h^2u^5\phi^{(4)}+4u^8\phi''\phi^{(4)})\times (u^3\phi''-u^4\phi'''-4h^2)(4u^6\phi''^2-8u^3h^2\phi''+4h^4)=0.$$

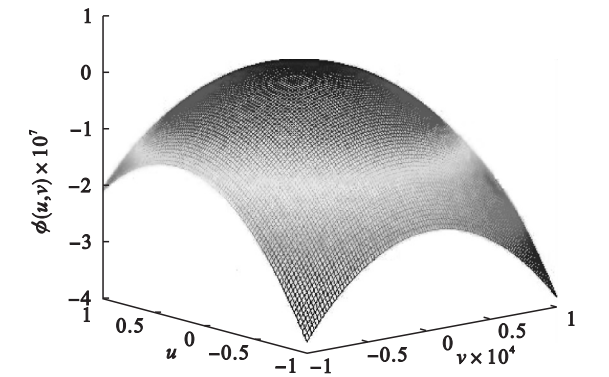


图 2 曲面③的数值解图像
Fig. 2 The numerical solution to surfaces ③

即

$$u^3\phi''-u^4\phi'''-4h^2=0, \tag{3}$$

或

$$4u^6\phi''^2-8u^3h^2\phi''+4h^4=0, \tag{4}$$

或

$$5u^6\phi''^2+52h^2u^3\phi''+2u^7\phi''\phi'''-16h^4-44h^2u^4\phi''' - 7u^8\phi'''^2-4h^2u^5\phi^{(4)}+4u^8\phi''\phi^{(4)}=0. \tag{5}$$

令 $m=\phi''$,则式(3)可以降阶为一阶常微分方程: $u^3m-u^4m'-4h^2=0$,可得到解析解:

$$m=h^2u^{-3}+C_1u. \tag{6}$$

将式(6)两次积分可以得到式(3)的解. 其他方程同理可以解得(其中方程(5)只可解得数值解)即可得定理.

对 C_i 和 h 取特殊常数,可得如图 3 和图 4 所示曲面的图像.

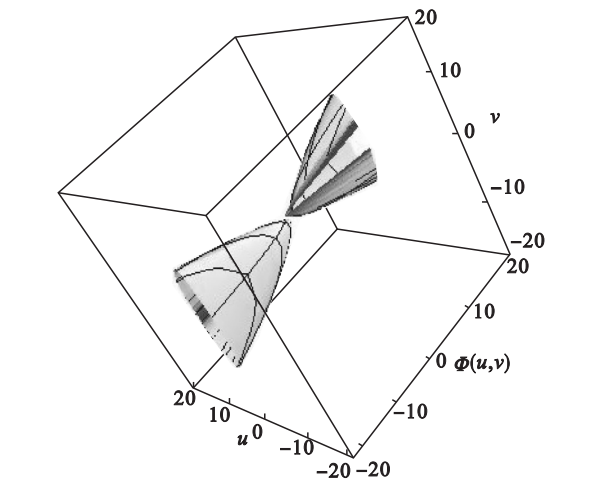


图 3 曲面 $\Phi(u,v)=(u,uv,\frac{1}{2}uv^2+\frac{1}{2}u^{-1}+\frac{1}{6}u^3+u+v+1)$
Fig. 3 The surface is $\Phi(u,v)=(u,uv,\frac{1}{2}uv^2+\frac{1}{2}u^{-1}+\frac{1}{6}u^3+u+v+1)$

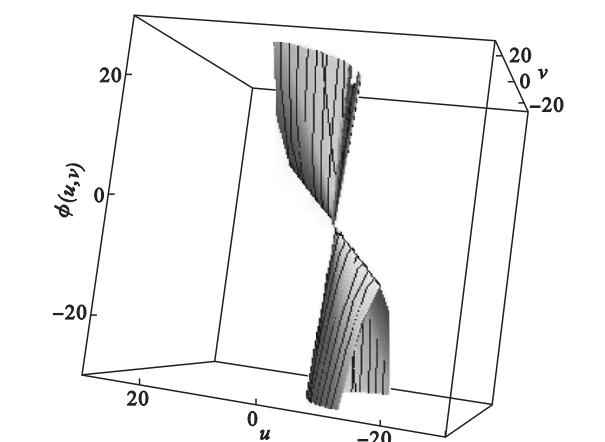


图 4 曲面 $\Phi(u, v) = (u, uv, \frac{1}{2}uv^2 + \frac{1}{2}u^{-1} + u + v + 1)$

Fig. 4 The surface is $\Phi(u, v) = (u, uv, \frac{1}{2}uv^2 + \frac{1}{2}u^{-1} + u + v + 1)$

定理 3 设 Φ 为三维仿射空间中的抛物型螺旋面,且其表达式为(1),则平均曲率为零时,曲面表达式中的 $\phi(u)$ 的数值解如图 5 所示.

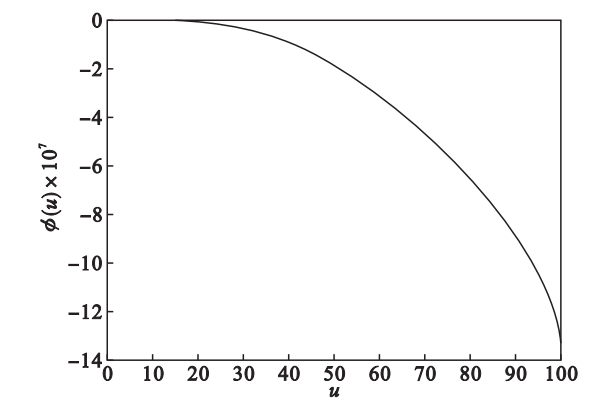


图 5 极小曲面中的数值解

Fig. 5 The numerical solution in minimal surfaces

此时可得曲面的数值解图像如图 6 所示.

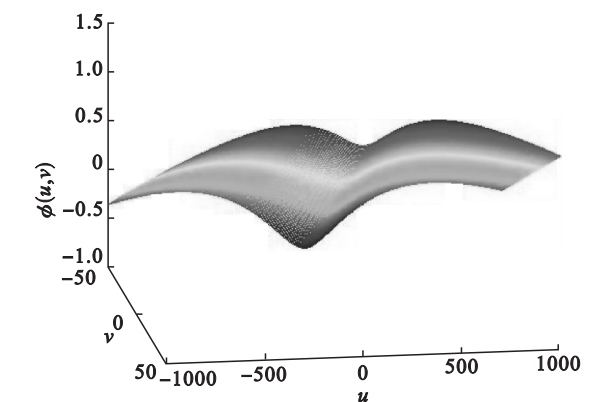


图 6 极小的抛物型螺旋面

Fig. 6 Minimal parabolic helicoidal surfaces

利用 Matlab 可求出函数 $\phi(u)$ 的数值解满足的图像.

3.2 平坦和极小的抛物型旋转曲面

定理 4 设 ψ 为三维仿射空间中的抛物型旋转面,且其表达式为式(2),则仿射高斯曲率为零时,曲面为以下几种形式之一.

- 1) $\psi(u, v) = (u, uv, \frac{1}{2}uv^2 + \frac{C_4}{6}u^3 + C_5u + C_6),$
- 2) $\psi(u, v) = (u, uv, \frac{1}{2}uv^2 - \frac{9}{2}u^{\frac{1}{3}} + C_7u + C_8).$

证明 直接计算可得

$$K = \frac{(-\phi'' + u\phi''')(5u\phi'' - 7u^2\phi'''^2 + 2u\phi'\phi''' + 4u^2\phi''\phi^{(4)})}{64\phi'^8(u^3\phi'')^{\frac{3}{4}}},$$

则当 $K=0$ 时,有 $-\phi'' + u\phi''' = 0$,或 $5u\phi'' - 7u^2\phi'''^2 + 2u\phi'\phi''' + 4u^2\phi''\phi^{(4)} = 0$. 分别求解这两个微分方程,定理即得证.

当常数 C_i 取特殊值时,可得相应的曲面(图 7 和图 8).

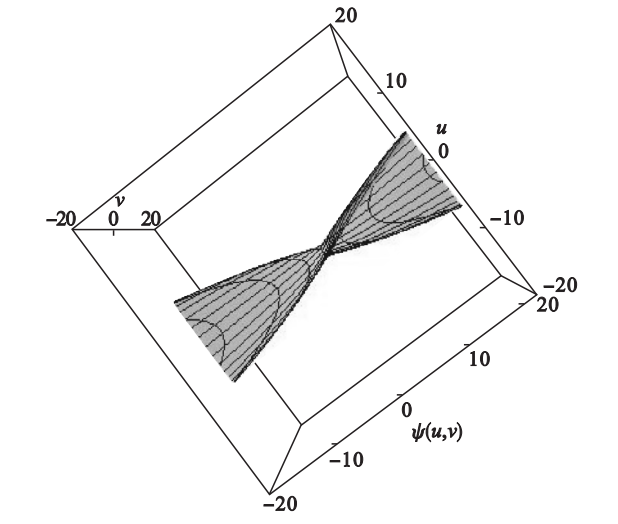


图 7 曲面 $\psi(u, v) = (u, uv, \frac{1}{2}uv^2 + u + v + u^3 + 1)$

Fig. 7 The surface is $\psi(u, v) = (u, uv, \frac{1}{2}uv^2 + u + v + u^3 + 1)$

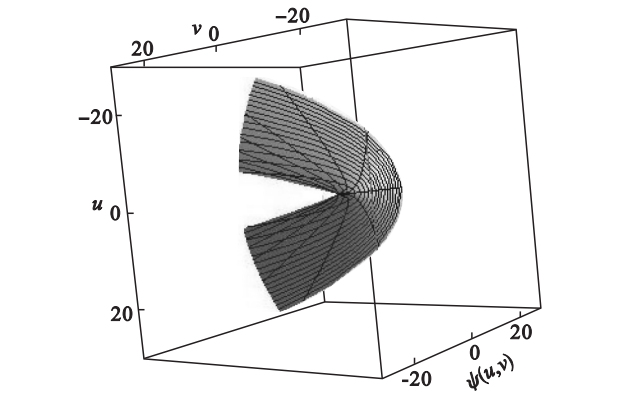


图 8 曲面 $\psi(u, v) = (u, uv, \frac{1}{2}uv^2 - \frac{9}{2}x^{\frac{1}{3}} + u + 1)$

Fig. 8 The surface is $\psi(u, v) = (u, uv, \frac{1}{2}uv^2 - \frac{9}{2}x^{\frac{1}{3}} + u + 1)$

定理 5 设 ψ 为三维仿射空间中的抛物型旋转面,且其表达为式(2),则仿射平均曲率为零时,曲面表达式为

$$\psi(u,v)=\left(u,uv,\frac{1}{2}uv^2+\frac{2C_9(u-8C_{10})(-6u+8C_{10})^{\frac{2}{3}}}{3}+C_{11}u+C_{12}\right).$$

证明 由 $H=\frac{-\phi'^2+7u^2\phi''^2-2u\phi''(3\phi'''+2u\phi^{(4)})}{32\phi''^2(u^3\phi'')^{\frac{3}{4}}}$,

令 $H=0$,则

$$-\phi''^2+7u^2\phi''^2-2u\phi''(3\phi'''+2u\phi^{(4)})=0.$$

求解该微分方程,定理即得证.

当常数 C_i 取特殊值时,可得相应的曲面(图 9).

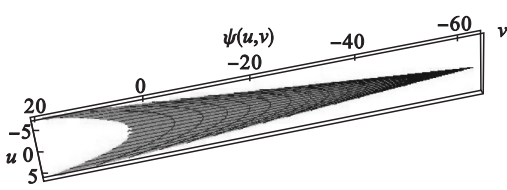


图 9 曲面 $\psi(u,v)=(u,uv,\frac{1}{2}uv^2+1+u+\frac{2(u-8)(-6u+8)^{\frac{2}{3}}}{3})$
Fig. 9 The surface is $\psi(u,v)=(u,uv,\frac{1}{2}uv^2+1+u+\frac{2(u-8)(-6u+8)^{\frac{2}{3}}}{3})$

4 结 语

本文在三维仿射空间中,研究了 Blaschke 度量下的抛物型螺旋面,并得到以下结论:当符距 $h \neq 0$ 时,分别得到平坦的和极小的抛物型螺旋面

所满足的方程;当符距 $h=0$ 时,分别得到平坦的和极小的抛物型旋转曲面所满足的方程.

参考文献:

[1] Faghfour M, Haji Badali A, Pourreza E. Blaschke structure for a special affine immersion[J]. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2008, 43(4): 214 – 220.

[2] Beneki C C, Kaimakamis G, Papantoniou B J. Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, 275(2): 586 – 614.

[3] Do Carmo M P, Dajczer M. Helicoidal surfaces with constant mean curvature[J]. *Tohoku Mathematical Journal*, 1982, 34(3): 425 – 435.

[4] Baikoussis C, Koufogiorgos T. Helicoidal surfaces with prescribed mean or Gaussian curvature[J]. *Journal of Geometry*, 1998, 63(1/2): 25 – 29.

[5] Richardson J M. Helices and helicoidal surfaces[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 1857, 63(4): 231 – 235.

[6] Mohanasubha R, Chandrasekar V K, Senthilvelan M. A note on deriving linearizing transformations for a class of second order nonlinear ordinary differential equations[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2018, 39(4): 202 – 212.

[7] Andrade M, Lewiner T. Affine-invariant curvature estimators for implicit surfaces[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2012, 29(2): 162 – 173.

[8] Yang D, Yu F. On affine translation surfaces in affine space[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, 440(2): 437 – 450.

[9] Alcázar J G, Goldman R. Detecting when an implicit equation or a rational parametrization defines a conical or cylindrical surface, or a surface of revolution[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2017, 23(12): 2550 – 2559.

[10] 苏步青. 仿射微分几何[M]. 北京: 科学出版社, 2010. (Su Bu-qing. Affine differential geometry[M]. Beijing: Science Press, 2010.)