

关于辊系接触问题的单元细化研究

赵建国¹, 孙大乐^{1,2}, 陈良玉¹

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 宝山钢铁股份有限公司, 上海 201900)

摘 要: 通过单元局部细化, 能够在保证计算精度的同时降低计算成本, 因此在 h 法和原有单元过渡法的基础上, 提出了多级细化方法, 并详细给出了实现形式。针对该方法在细化边界上的局部过刚度问题, 提出了相应的改进方案。提出了细化尺度的概念, 得出了计算精度随细化尺度的变化规律, 建立了两者的函数关系式, 一方面能够预测模型求解精度, 另一方面为确定单元细化程度提供了依据, 实现了效率与精度的平衡, 具有较高的实用价值。

关 键 词: 轧机辊系; 接触分析; h 法; 局部细化; 细化尺度

中图分类号: O 242.21

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2010)05-0721-04

Study on Refined Elements Used for FEA of Contact Between Rolls

ZHAO Jian-guo¹, SUN Da-le^{1,2}, CHEN Liang-yu¹

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. Baoshan Iron & Steel Co., Ltd, Shanghai 201900, China. Correspondent: ZHAO Jian-guo, E-mail: zjg-5352@163.com)

Abstract: Locally refined elements in FEA enable the computational cost to be reduced with the accuracy ensured simultaneously. The multilevel refined method (MRM) is therefore proposed on the basis of the h method and existing element transition method, with its implementation procedure given. To alleviate the effect of local over-rigidity on the refined element boundary, an improving scheme is given. A new concept, refined scale, is described and how the computational accuracy varies with the scale is studied to establish the functional relationship between them. Thus, the computational accuracy of finite element model can be forecast and, what's more, a reference is provided for determining the element refining extent so as to balance the computational accuracy and cost. The method proposed is highly applicable to technological processes.

Key words: mill rolls; contact analysis; h method; locally refined element; refined scale

轧机辊系的作用是传递轧制力, 实现轧件的预定形变, 对轧制质量及生产效率有较大影响。由于辊系接触的复杂性, 且不能直接应用 Hertz 理论, 为明确轧辊的使用性能, 对高精度、高效率数值解法的研究至关重要。有限元发展早期, h - p 法^[1-2] (h 法——增加单元数量, p 法——增加单元阶次) 和 r 法^[3] (节点位置优化) 得到应用, 以提高求解精度。后来为克服一次单元剪切锁闭现象, 拟应变法^[4-5]、减缩积分法^[6]、非协调单元法^[7-8] 相继出现, 使求解精度进一步提高。在接

触分析和其他一些有应力集中的问题上, 局部细化技术^[9-10] 实现了精度与效率的统一。

本文结合 h 法和原有单元过渡方法, 对单元的局部细化技术进一步研究, 在大量计算结果的基础上得到细化程度与计算误差的函数关系式, 实现了模型的精度预测和计算成本最小化的目标, 为工程应用提供借鉴。

1 细化单元过渡方法研究

如接触、断裂、塑性变形和其他一些应力集中

收稿日期: 2009-08-12

基金项目: 辽宁省科技攻关计划项目(2008216005)。

作者简介: 赵建国(1978-), 男, 辽宁法库人, 东北大学博士研究生; 孙大乐(1965-), 男, 山东蓬莱人, 东北大学教授, 博士生导师; 陈良玉(1959-), 男, 山东寿光人, 东北大学教授。

问题, 具有高度的非线性, 为提高有限元计算精度, 必须采用较小的网格. 如全模型采用小网格, 计算成本激增, 甚至达到无法接受的程度, 而实际应用中, 人们更关心的是某些局部受力状态, 对于不重要区域和应力梯度平稳处没有必要使用小网格, 于是, 为协调计算精度与成本的矛盾, 单元局部细化技术应运而生.

对于轧机辊系接触问题, 由于接触载荷沿辊周向变化梯度大, 对网格尺度的依赖性较强, 而沿轴向相对变化较小, 对网格尺度的依赖性较弱, 所以本文重点对轧辊横截面的细化方法进行研究. 如图 1a 为常规细化方法, 虽不需要修改单元插值函数和刚度矩阵, 但由于网格畸变, 严重影响计算精度及收敛率, 而且模型准备时间长、效率低. 文献[8]采用图 1b 的细化方式, 通过在过渡单元 e_2 边界上增加一个虚拟节点, 并修正插值函数, 实现

细化边界的变形协调, 其应用取得了较好的效果, 但虚拟节点位置的限定使其通用性较差, 且只适用于 1: 2 的细化. 图 1c 所示的细化方法, 实现了多级细化, 模型构建较灵活. 但多级细化同样面临细化边界上变形协调问题, 为保证边界协调, 可通过如下方式解决.

如图 1c 所示, 在保持单元插值函数不变的条件下, 由一次单元的性质可知, 单元 e_0 变形后边 jk 仍为直线, 欲满足变形协调方程, 单元 e_1, e_2, \dots, e_n 变形后, 节点 i_1, i_2, \dots, i_{n-1} 必须与节点 j, k 共线. 假设节点 j 的位移为 (u_j, v_j) , 节点 k 的位移为 (u_k, v_k) , 并令变形后边 jk 长度为 d_{jk} , 节点 j, i_m 间的距离为 d_{jm} , 定义

$$s_m = \frac{d_{jm}}{d_{jk}}, m = 1, 2, \dots, n - 1.$$

(1)

由等比定理得节点 i_m 的位移为

$$\begin{bmatrix} u_m \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - s_m & 0 & s_m & 0 \\ 0 & 1 - s_m & 0 & s_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}.$$

(2)

为实现式(2)的约束条件, 可对刚度矩阵和载荷列阵作相应修改, 在此为表述方便, 令总刚度矩阵中对应节点 i_m 项为第 m 行, 修改前等式为

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & k_{mm} & k_{m(m+1)} & & & \\ & k_{(m+1)m} & k_{(m+1)(m+1)} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & k_{jj} & k_{j(j+1)} \\ & & & & k_{(j+1)j} & k_{(j+1)(j+1)} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & k_{kk} & k_{k(k+1)} \\ & & & & & & k_{(k+1)k} & k_{(k+1)(k+1)} \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_m \\ v_m \\ \vdots \\ u_j \\ v_j \\ \vdots \\ u_k \\ v_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ R_m \\ R_{(m+1)} \\ \vdots \\ R_j \\ R_{(j+1)} \\ \vdots \\ R_k \\ R_{(k+1)} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

(3)

对于单节点 i_m , 只需对刚度矩阵和载荷列阵的第

m 双行分别进行修改, 修改后的等式变为

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & 0 & s_m - 1 & 0 & -s_m & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & s_m - 1 & -s_m & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & k_{jj} & k_{j(j+1)} \\ & & & & k_{(j+1)j} & k_{(j+1)(j+1)} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & k_{kk} & k_{k(k+1)} \\ & & & & & & k_{(k+1)k} & k_{(k+1)(k+1)} \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_m \\ v_m \\ \vdots \\ u_j \\ v_j \\ \vdots \\ u_k \\ v_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R_j \\ R_{(j+1)} \\ \vdots \\ R_k \\ R_{(k+1)} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

(4)

细化边界上其他节点位移修改方式同节点 i_m , 只需修改相应项, 由于篇幅限制, 在此不一一列出, 最后得到修改后的总刚度矩阵。

由以上可知, 多极细化法的实现方法简单, 不需要修改单元插值函数, 只对相应行的刚度矩阵和载荷列阵作适当修改, 即可实现任意级单元细化, 具有程序实现简便、通用性强的特点, 大大降低了模型准备时间。应用以上方式进行细化不可避免地影响计算精度, 为保证精度要求, 下面将对细化区大小及网格密度进一步研究。

2 网格细化对求解精度的影响

在细化边界上, 当某一单元所受载荷较大时, 由于其节点位移被强制联系到相邻的粗单元边上, 这就相当于一个变形体被放到另一刚度更大的体上, 限制了该变形体的整体位移, 单元应变反而增加, 而其他小应变单元在粗单元的影响下变形增大, 改变了原有应力分布, 降低了求解精度。为降低细化边界的影响, 可通过扩大细化区尺寸来解决。如细化区过大则单元数增多, 计算量增大, 过小则不能有效消除细化边界的影响, 大量计算表明, 细化区尺寸不小于 3 倍接触弧宽度即可显著降低细化边界过刚度的影响。

2.1 模型验证

以某轧机为例, 支承辊、工作辊径分别为 2 300, 1 240 mm, 辊面长分别为 5 000, 5 100 mm, 弹性模量均为 2.16×10^5 MPa, 泊松比均为 0.3, 单位载荷 30 kN/mm。分别采用本文细化法、常规细化法和 Hertz 法进行计算, 结果见表 1, 其中由 Hertz 理论得最大接触应力为

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{PE}{\pi R}}, \tag{5}$$

接触半宽为

$$a = \sqrt{\frac{4PR}{\pi E}}. \tag{6}$$

式中: P 为 单 位 长 度 载 荷, N/mm; $E = \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^{-1}$, E_1 , E_2 和 μ_1 , μ_2 分别为两

接触辊弹性模量和泊松比; $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, R_1 , R_2 为两接触辊半径, mm。最大剪应力为 $0.3\sigma_p$, 位于辊面下 $0.78a$ 处。

由计算结果可知, 在相同的网格密度的条件下, 与 Hertz 法对比, 本文细化法和常规细化法都具有较高的计算精度, 完全适用于工程计算, 而且本文方法略优于传统方法。

表 1 不同计算方法的结果对比

Table 1 Comparison between computation results by different methods MPa		
方法	最大接触应力	最大剪应力
本文	1 687	512
常规	1 695	515
Hertz	1 675	503

2.2 细化尺度研究

下面研究细化程度对求解精度的影响, 由式 (6) 可知, 接触宽度与载荷、辊径和材料属性等有关, 不同问题所需的细化单元大小也不同, 为使研究更具普遍性, 综合考虑各种因素, 定义细化尺度为

$$r = \frac{l}{a} = l \left(\frac{4PR}{\pi E} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

式中 l 为接触区单元边长, mm。

最大剪应力和最大接触应力对辊系接触来说是两个重要的力学参数, 对轧辊的使用性能有较大影响, 下面通过这两个参数的计算, 确定细化尺度与求解误差间的关系。为使研究结果更具代表性, 考虑到实际中各种工况, 辊径变化范围为 300 ~ 2 000 mm, 单位载荷为 3~ 30 kN/mm, 弹性模量均为 2.16×10^5 MPa, 泊松比 0.3, 经大量计算 (约 600 次不同组合), 并与 Hertz 解对比, 得到细化尺度对最大剪应力和最大接触应力计算误差的影响, 分别见图 2, 图 3。

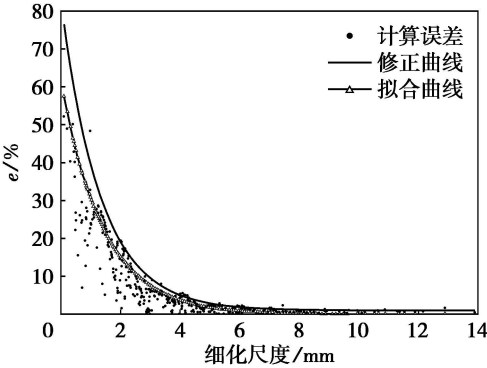


图 2 细化尺度对最大剪应力计算误差的影响
Fig. 2 Effect of refined scale on computational error of maximum shear stress

细化尺度对最大剪应力的影响, 按图 2, 首先剔除明显不合理点, 然后沿横轴以 0.1 为小区间对数据点重新划分, 分别计算各段的均值 E 和标准差 e , 保留均值 $E \pm \sigma$ 的数据点, 对剩下数据按 $y = e^{(a - bx)}$ 进行拟合, 得到:

$$e = e^{(4.1235 - 0.7035r)}. \tag{8}$$

在实际应用中, 如按式 (8) 预测误差 e , 可能造成计算精度低于预测精度, 为此, 应对式 (8) 进

行修正。为使预测精度更可信,可取计算误差的上包络线,同时考虑到当 r 增大到一定程度时,计算误差已趋于常值,在 $(0, 1)$ 之间振荡,故在修正曲线中增加一常数项,修正后的曲线为

$$e = e^{(4.4 - 0.75r)} + 1. \quad (9)$$

细化尺度对最大接触应力的影响,由图 3 可知,当 $r < 1.8$ 时, e 变化较大,当 $r > 2$ 时,随着 r 的增大, e 变化不显著。按式(8)方法,得拟合曲线方程为

$$e = 15.1595r^{-0.9998}. \quad (10)$$

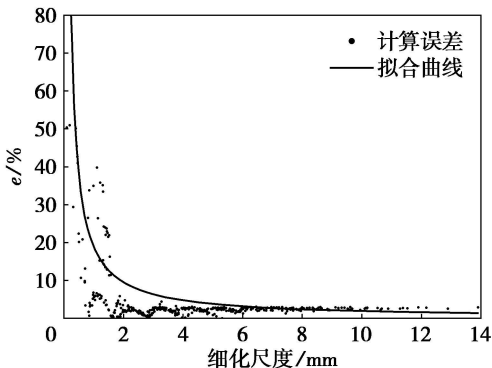


图 3 细化尺度对最大接触应力计算误差的影响

Fig. 3 Effect of refined scale on computational error of maximum contact stress

综合图 2, 图 3, 当 $r < 1.8$ 时, 最大接触应力的误差不确定性较大, 工程应用中应避免, 当 $r > 1.8$ 时, 对最大接触应力计算精度的影响较小, 此时应以满足最大剪应力计算精度为准, 即以式(9)预测误差。由式(9)进一步可得细化尺度的表达式为

$$r = 5.8667 - 1.3333 \ln(e - 1). \quad (11)$$

由以上可知, 在实际工程应用中, 对于预先建好的模型, 可根据式(9)预测求解精度, 反过来, 为满足一定的精度要求, 可由式(11)确定细化尺度, 以最小的计算成本满足实际需求, 提高了计算效率。

3 结 论

1) 提出了多级单元细化方法, 并给出了实现形式。该法只需修改相应细化节点的刚度矩阵和载荷阵, 即可实现单元的任意级细化, 大大降低模型准备时间, 并具有程序实现简单、通用性强的特点。

2) 通过适当加大细化区域尺寸, 保证了求解精度。经大量计算, 当细化区的尺寸不小于 3 倍接

触弧宽度时, 即可显著弱化细化边界上局部过刚度的影响, 满足求解精度需求。

3) 提出了细化尺度的定义, 解决了最小单元边长随载荷及辊径等因素变化的无规律性, 使研究更具普遍性, 得到细化尺度对有限元计算精度的影响规律, 建立了计算误差与细化尺度的函数关系式, 为工程应用提供了借鉴。

参考文献:

- [1] Guo B Q. The h-p version of the finite element method for elliptic equations of order 2m[J]. *Numerische Mathematik*, 1988, 53: 199–224.
- [2] Li L. Discretization of the Timoshenko beam problem by the p and the h-p versions of the finite element method[J]. *Numerische Mathematik*, 1990, 57: 413–420.
- [3] Martinez R, Samartin A. Two-dimensional mesh optimization in the finite element method[J]. *Computers & Structures*, 1991, 40(5): 1169–1175.
- [4] Bischoff M, Ramm E, Braess D. A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite elements[J]. *Computational Mechanics*, 1999, 22: 443–449.
- [5] Lee W H, Han S C. Free and forced vibration analysis of laminated composite plates and shells using a 9-node assumed strain shell element[J]. *Computational Mechanics*, 2006, 39: 41–58.
- [6] Li K P, Cescotto S. An 8-node brick element with mixed formulation for large deformation analyses[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, 141: 157–204.
- [7] Romero I, Bischoff M. Incompatible bubbles: a non-conforming finite element formulation for linear elasticity[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196: 1662–1672.
- [8] Dureisseix D, Bavestrillo H. Information transfer between incompatible finite element meshes: application to coupled thermo-viscoelasticity[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195: 6523–6541.
- [9] 王爱民, 王勖成. 有限元计算中疏密网格间过渡单元的构造[J]. 清华大学学报, 1999, 39(8): 100–103.
(Wang Ai-min, Wang Xu-cheng. Construction of the transition elements between the sparse and dense meshes in the finite element computation[J]. *Journal of Tsinghua University*, 1999, 39(8): 100–103.)
- [10] 梅瑞斌, 李长生, 刘相华. 单元划分和时间步长对瞬态温度震荡的影响[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2008, 29(2): 233–236.
(Mei Rui-bin, Li Chang-sheng, Liu Xiang-hua. Influence of mesh and time step on transient temperature oscillation[J]. *Journal of Northeastern University: Natural Science*, 2008, 29(2): 233–236.)