

半无限土体圆形隧道结构中地震波的传播

杨旭姣¹, 胡振东¹, 梁 君², 贾洪瑞³

(1. 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092; 2. 青岛北海船舶重工有限责任公司 船舶与海洋工程设计研究所, 山东 青岛 266520;
3. 中铁十七局集团第二工程有限公司, 陕西 西安 710043)

摘 要: 基于弹性波的散射理论,研究了半无限土体内圆形隧道中土体对 SH 波的多重散射和动应力集中,采用波函数展开法和镜像法,将待解问题归结为一组无穷代数方程组的求解,得到了问题的解析解. 作为算例,给出了衬砌附近动应力集中因子的数值解,分析了围岩的剪切模量、入射波波数、半无限土体边界到衬砌的距离等参数对动应力集中因子的影响. 数值计算分析表明:围岩的剪切模量、入射波波数等是影响动应力集中因子的重要因素. 本文的研究方法和数值结果有望为衬砌的地震评价提供理论依据.

关 键 词: 圆形隧道; SH 波散射; 边界条件; 动应力集中因子; 解析解

中图分类号: O 347.4; TU 311.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2014)02-0299-06

Seismic Wave Propagation Around Circular Tunnel Structure in Semi-infinite Soil Body

YANG Xu-jiao¹, HU Zhen-dong¹, LIANG Jun², JIA Hong-rui³

(1. School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Marine Design and Research Institute, Qingdao Beihai Shipbuilding Heavy Industry Co., Ltd., Qingdao 266520, China; 3. The 2nd Engineering Co., Ltd. of China Railway 17 Bureau Group Corporation, Xi'an 710043, China. Corresponding author: YANG Xu-jiao, E-mail: 495773319@qq.com)

Abstract: Based on the scattering theory of elastic waves, the scattering of SH wave and the dynamic stress concentration around circular tunnel with lining were investigated by employing the wave function expansion and mirror methods. The analytical solution of the problem, which was taken as a group of unlimited algebraic equations, was derived, and the numerical solution of the dynamic stress concentration factor around the lining was given. The effects of the shear elasticity of the surrounding rock and the lining, together with the wave number on the dynamic stress concentration factors were analyzed. It is shown that the shear elasticity of the surrounding rock and the wave number are factors that influence dynamic stress concentration, which may provide important theoretical basis for the earthquake evaluation of lining.

Key words: circular tunnel; scattering of SH wave; boundary conditions; dynamic stress concentration factor; analytical solution

圆形隧道结构中衬砌在地震动载荷下工作时,由于动载荷在衬砌内会出现各种动应力集中现象,为了减小应力集中,提高衬砌的强度和使用寿命,需要对弹性波散射产生的机理有明确的了解. 对于单散射体弹性波散射问题的研究比较成熟,可采用波函数展开法、复变函数法、积分方程法和匹配渐近展开法等分析求解. 由于多重散射

问题相对复杂,开展研究的时间晚于单次散射^[1]问题的研究.

地震中弹性波 $w^{(i)}$ 入射到地下空间介质内部时,当遇到一个散射体会发生一次散射,产生散射波 $w_1^{(s)}$ 时,散射波会作为新的入射源在结构的界面或者其他夹杂表面再次发生散射 $w_2^{(s)}$,散射后的波源又会在结构的界面或者其他夹杂表面发生

散射 $w_3^{(s)}$, 如此类推, 会有 $w_n^{(s)} (n=4, 5, \cdots)$ 产生. 这样, 散射体周围总的弹性波场 w 可表示为 $w = w^{(i)} + w_1^{(s)} + w_2^{(s)} + w_3^{(s)} + \cdots + w_n^{(s)}$ [2]. 弹性波在两个或多个散射体之间的来回折射和传播形成了多重散射; 如果两个散射体的距离较远, 就可简化为单次散射.

对于弹性波单次散射问题求解方法的研究已经比较成熟, 但是在研究多散射体的多重散射时, 必须将不同散射体产生的散射场叠加, 导致解析求解波散射问题非常困难. 目前, 人们往往采用半解析方法或数值方法分析求解弹性波多重散射问题, 主要有: 波函数展开法、波函数展开法和镜像法 [3]、匹配渐近展开法、转换矩阵法 (T 矩阵法)、数值计算法 (边界元、有限元和有限差分法).

由弹性波多重散射引起的动应力问题在各种工程结构中很常见. 通过对弹性波多重散射理论和动应力问题的研究, 可对半无限地下空间结构内圆形衬砌周围动应力的大小及分布规律有详细的了解, 从而可减少有限结构内部的动应力, 为结构的强度分析和优化设计提供理论基础 [4]. 由于圆形衬砌在隧道工程中应用广泛, 为了提高圆形衬砌的强度, 减小内部应力, 提高使用寿命, 并实现衬砌的优化设计, 对其内部的动应力分布规律进行研究是十分必要的.

1 半无限圆形隧道结构的建模与求解

如图 1 所示, 本文以半无限地下空间内圆形隧道结构 [5] 为研究对象. 其中围岩的剪切模量及密度分别为 μ_0, ρ_0 . 圆形隧道衬砌的半径为 a , 衬砌中心与地下半无限空间边界的距离为 b , 反平面剪切波沿 x 轴正向传播.

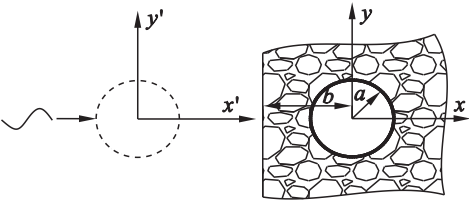


图 1 圆形隧道结构中的衬砌与入射弹性波
Fig. 1 Schematic of the lining around the circular tunnel and the incident elastic waves

反平面剪切运动 [6] 的控制方程可描述为

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1}$$

式中: τ_{xz} 和 τ_{yz} 是反平面剪应力; w 是位移. 反平面剪切变形下的本构关系为

$$\tau_{xz} = \mu_0 \frac{\partial w}{\partial x}, \tau_{yz} = \mu_0 \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2}$$

将式 (2) 代入式 (1), 得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3}$$

式中, $c_s = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ 是剪切波的波速.

令 $w = ue^{(-i\omega t)}$, 方程 (3) 可以变形为

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0. \tag{4}$$

式中: ω 是入射波的频率; $k = \omega/c_s$ 是弹性波数.

通过方程 (4) ~ (6) 可以看到这里存在形式为 $Ue^{-i\omega t} = w_0 e^{i(kx - \omega t)}$ 的弹性波. 方程 (4) 决定衬砌产生的散射场的一般解可描述为

$$w^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} e^{(-i\omega t)} \tag{5}$$

这里, $r = (x, y)$, $H_n^{(1)}(\cdot)$ 是第一类 n 阶 Hankel 函数, 其中散射波的模式系数用 A_n 表示, 取决于边界条件; 尤其注意, 反射波场和散射波场一般解的形式是相同的.

2 SH 波激发和总波场的表示

在隧道围岩中, 设一反平面剪切波沿着 x 轴正方向在半无限空间传播, 入射波在原像的局部坐标系中可表示为

$$w^{(i)} = e^{[i(kx - \omega t)]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta} e^{(-i\omega t)} \tag{6}$$

式中: k 为传播波的波数; $J_n(\cdot)$ 是第一类 Bessel 函数.

半无限空间边界的反射波 [7] 可以用虚拟的镜像产生的散射波来表示, 其中, 设入射波沿 x 轴负方向入射, 表达式如下:

$$w_2^{(i)} = w_0 e^{[-i(kx' + \omega t)]} = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} J_n(kr') e^{in\theta'} e^{(-i\omega t)} \tag{7}$$

由于原像和镜像之间存在多重散射 (如图 3), 圆孔产生的波散射场在原像局部坐标系 (r, θ) 中可表示为

$$w_1^{(s)} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^l H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} e^{(-i\omega t)} \tag{8}$$

式中 l 是原像和镜像之间的散射次数.

而镜像圆孔产生的散射波在局部极坐标系 (r', θ') 中可表示为

$$w_2^{(s)} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^l H_n^{(1)}(kr') e^{in\theta'} e^{(-i\omega t)} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^l H_n^{(1)}(kr') e^{in\theta'} e^{(-i\omega t)} \tag{9}$$

式中, A_n^l, B_n^l ($l=1, 2, \dots$) 分别为原像与镜像第 l 次散射的弹性波模式系数。

这样, 隧道围岩中由入射场、散射场及界面反射场叠加形成的总波场可表示为

$$w = w_1^{(i)} + w_1^{(s)} + w_1^{(r)} = w_1^{(i)} + w_1^{(s)} + w_2^{(s)}. \quad (10)$$

将弹性波表达式由 (r', θ') 坐标系中变换到 (r, θ) 坐标系中. 由 Graf 加法定理, 存在如下关系:

$$H_n^{(1)}(kr')e^{in\theta'} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} H_{m-n}^{(1)}(2kb) J_m(kr) e^{im\theta}, \quad (11a)$$

$$H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}(2kb) J_m(kr') e^{im\theta'}. \quad (11b)$$

由坐标变换得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(kr') e^{in\theta'} e^{(-i\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} H_{m-n}^{(1)}(2kb) J_m(kr) e^{im\theta} e^{(-i\omega t)}. \quad (12)$$

式中, $r' = \sqrt{r^2 + 4b^2 + 4rb\cos\theta}$,

$$\cos\theta' = \frac{r'^2 + 4b^2 - r^2}{4br'}.$$

将 (r, θ) 坐标系中的弹性波表达式变换到 (r', θ') 坐标系中, 关系为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} e^{(-i\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}(2kb) J_m(kr') e^{im\theta'} e^{(-i\omega t)}. \quad (13)$$

式中, $r = \sqrt{r'^2 + 4b^2 - 4r'bc\cos\theta'}$,

$$\cos\theta = -\frac{r'^2 + 4b^2 - r^2}{4br}.$$

不失一般性, 显然对于隧道围岩为自由边界的情况, 边界条件为 $\tau_{rz}|_{r=a} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=a} = 0$, 即

$$\left(\frac{\partial w_1^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial w_1^{(s)}}{\partial r} + \frac{\partial w_2^{(s)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0. \quad (14)$$

3 模式系数的确定

原像与镜像之间发生弹性波多重散射, 通过满足孔洞边界条件, 可确定散射波模式系数。

当 $l=1$ 时, A_n^l, B_n^l 有如下关系:

$$A_n^1 \left\{ -\frac{1}{a} [nH_n^{(1)}(ka) - kaH_{n+1}^{(1)}(ka)] \right\} = -i^n \left\{ -\frac{1}{a} [nJ_n(ka) - kaJ_{n+1}(ka)] \right\}, \quad (15a)$$

$$B_n^1 \left\{ \frac{1}{a} [nH_n^{(1)}(ka) - kaH_{n+1}^{(1)}(ka)] \right\} = -i^{-n} \left\{ \frac{1}{a} [nJ_n(ka) - kaJ_{n+1}(ka)] \right\}. \quad (15b)$$

当 $l=2, 3, \dots$ 时, 圆孔产生的第 l 次散射波描

述为 (略去时间因子)

$$W_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^l H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad (16a)$$

$$W_{l-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{l-1} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}. \quad (16b)$$

圆孔镜像产生的第 l 次散射波描述为

$$W_l' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^l H_n^{(1)}(kr') e^{in\theta'}, \quad (17a)$$

$$W_{l-1}' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{l-1} H_n^{(1)}(kr') e^{in\theta'}. \quad (17b)$$

整理得

$$A_n^l \left\{ \frac{1}{a} [nH_n^{(1)}(ka) - kaH_{n+1}^{(1)}(ka)] \right\} = -B_n^{l-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} H_{m-n}^{(1)}(2kb) \times \left\{ \frac{1}{a} [mJ_m(ka) - kaJ_{m+1}(ka)] \right\} e^{[i(m-n)\theta]}. \quad (18a)$$

同样, 由 $\left(\frac{\partial W_l'}{\partial r'} + \frac{\partial W_{l-1}'}{\partial r'} \right) \Big|_{r'=a} = 0$ 得

$$B_n^l \left\{ \frac{1}{a} [nH_n^{(1)}(ka) - kaH_{n+1}^{(1)}(ka)] \right\} = -A_n^{l-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}(2kb) \times \left\{ J_m(ka) + \frac{1}{a} [mJ_m(ka) - kaJ_{m+1}(ka)] \right\} e^{i(m-n)\theta}. \quad (18b)$$

于是, 弹性模式系数 A_n^l 和 B_n^l 为无穷代数方程, 可由式 (18) 求得。

该研究问题的特征长度为圆形隧道的半径 a . 分析计算时, 采用如下量纲为一的量: $ka = 0.1 \sim 5.0$, 衬砌与半无限空间边缘的相对距离 $b/a = 1.05 \sim 6.0$.

半无限空间内圆形衬砌边界的动应力集中系数, 即动应力集中因子是全波在衬砌周围某一点的剪应力与入射波在同一点上产生的应力的比值^[8]. 因此, 半无限空间围岩内圆孔周围的动应力集中系数为

$$\tau_{\theta z}^* = \left| \frac{\tau_{\theta z}}{\tau_0} \right|. \quad (19)$$

其中,

$$\tau_{\theta z}^* = \frac{1}{k} \left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n+1} n J_n(ka) \right] e^{in\theta} + \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i n A_n^l H_n^{(1)}(ka) \right] e^{in\theta} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} i m B_n^l \times H_{m-n}^{(1)}(2kb) J_m(ka) \right\} e^{im\theta}. \quad (20)$$

4 数值算例与分析

给式(20)中的参数定义不同的值,并利用 MATLAB 对其进行数值计算,据此研究半无限地下空间内圆形衬砌 SH 波的散射与动应力集中。

1) 衬砌周围的动应力集中系数在 $b/a = 1.1$ 时的分布如图 2 所示:当 $ka = 0.1$ 时,动荷载由于波数较小可看作静荷载,动应力集中系数的最大值在 2 附近,且靠近边界处的值比远离边界的值大;当 $ka = 0.5$ 时,动应力集中系数的最大值在 2.3 附近,同样,靠近边界处的值比远离边界的值大;当 $ka = 2$ 时,其动应力集中系数的最大值在 2.2 附近,很明显此时动应力集中系数的最大值发生了偏移,最大值发生在 $7\pi/12$ 和 $17\pi/12$ 的

位置,靠近边界处的值比远离边界的值大;当 $ka = 5$ 时,其动应力集中系数的最大值在 1.25 附近,出现最大值的位置偏移较大,且呈不规则状态,最大值发生在 $13\pi/18$ 和 $23\pi/18$ 的位置,并且有多个极值,靠近边界处的值比远离边界的值大. 由此可见,衬砌及半无限空间边缘间存在多重散射时,靠近边界比远离边界时产生的动应力集中系数值大;当波数较小时,动应力集中系数的分布比较规则,且最大值的位置固定,为 $\pi/2$ 和 $3\pi/2$;随着波数的增大,动应力集中系数的分布开始出现不规则现象,并且在一定范围内动应力集中系数的最大值随着波数的增大而增大;当波数增大到一定值后,动应力集中系数的最大值会减小,但是,动应力集中系数的分布位置不规则的现象更加突出。

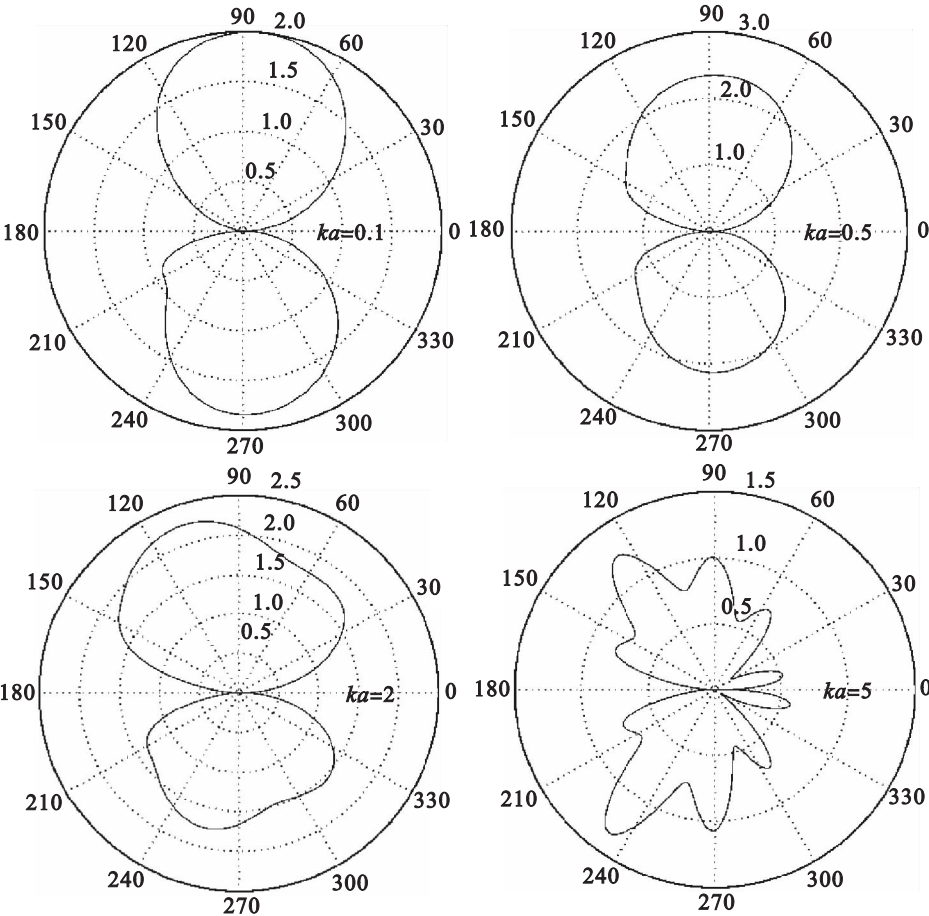
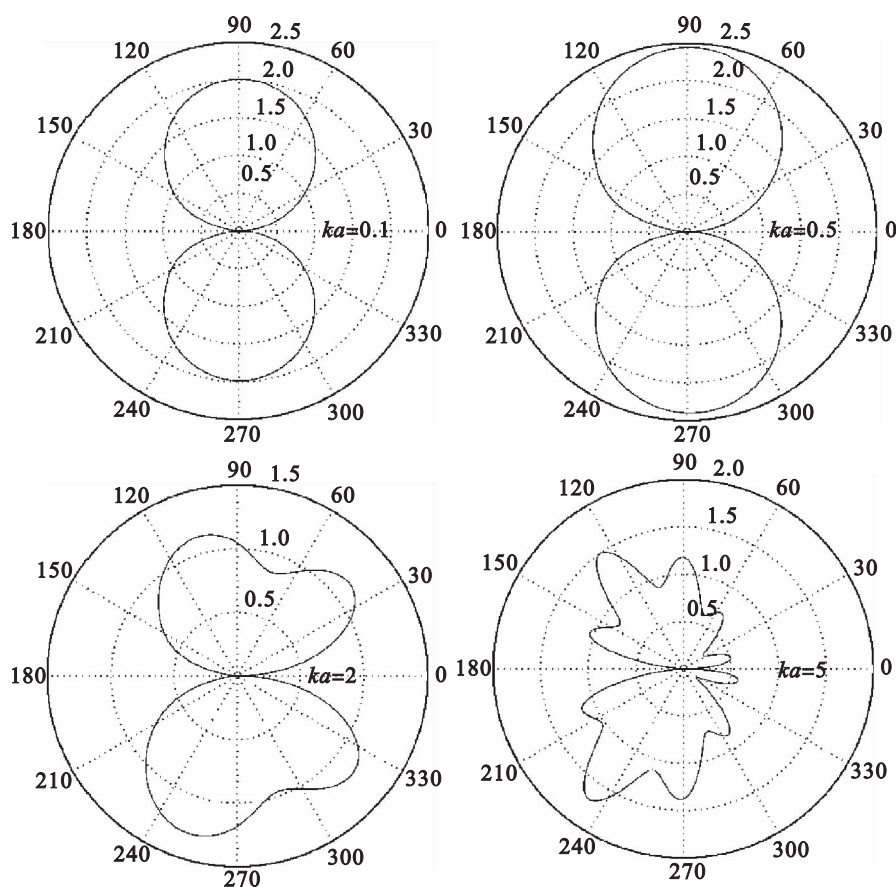
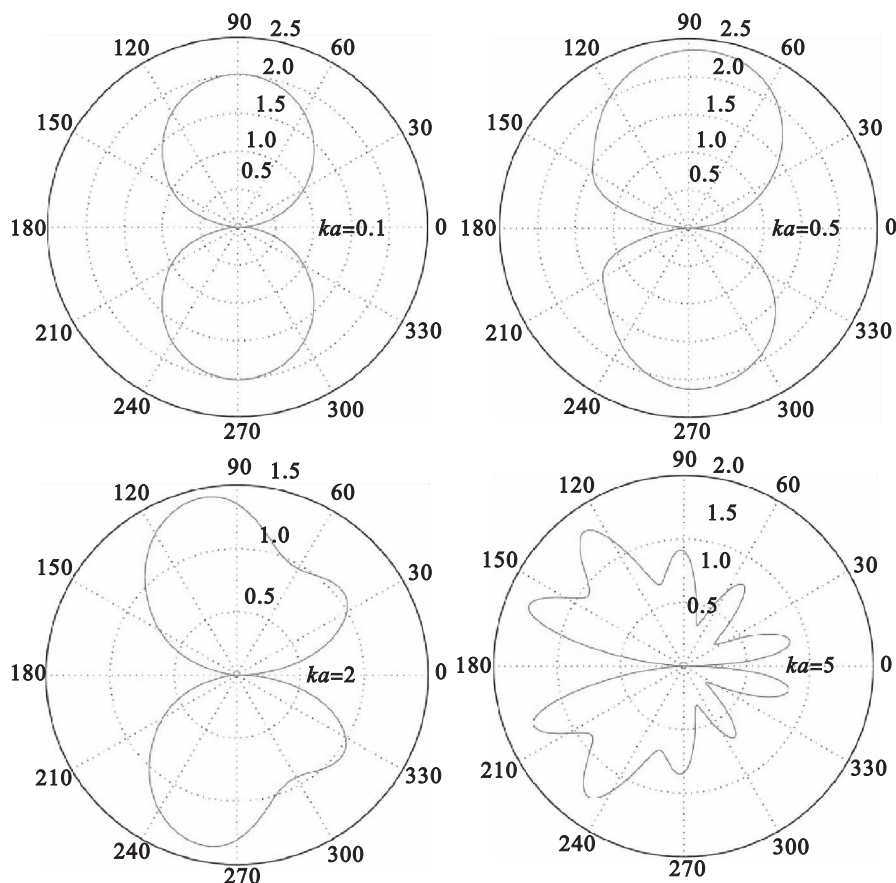


图 2 围岩周围的动应力分布($b/a = 1.1$)
Fig. 2 Distribution of dynamic stress around the surrounding rock($b/a = 1.1$)

2) 衬砌周围的动应力集中系数在 $b/a = 1.5$ 时的分布如图 3 所示. 不难发现 $b/a = 1.5$ 与 $b/a = 1.1$ 的动应力集中系数的性质有许多相同之处,但当 $ka = 0.5$ 时,其动应力集中系数的最大值在 2.5 附近,比 $b/a = 1.1$ 时有一定的增加。

3) 衬砌周围的动应力集中系数在 $b/a = 2$ 时的分布如图 4 所示. 可见, $b/a = 2$ 与 $b/a = 1.5$, $b/a = 1.1$ 的动应力集中系数的性质有许多相同之处. 随着 b/a 的增大,动应力集中系数有减小的趋势。

图 3 围岩周围的动应力分布 ($b/a=1.5$)Fig. 3 Distribution of dynamic stress around the surrounding rock ($b/a=1.5$)图 4 围岩周围的动应力分布 ($b/a=2$)Fig. 4 Distribution of dynamic stress around the surrounding rock ($b/a=2$)

5 结 论

- 1) 衬砌和半无限空间边缘间存在多重散射,靠近边界的动应力集中系数比远离边界的要大;当波数较小时,动应力集中系数的分布比较规则,且出现最大值的位置较固定.
- 2) 随着波数的增大,动应力集中系数的分布开始出现不规则的现象,且在一定范围内动应力集中系数的最大值随着波数的增大而增大;当波数增大到一定值后,动应力集中系数的最大值会减小,但是,动应力集中系数的分布位置不规则的现象更加突出.
- 3) 半无限空间的边界与衬砌的距离直接影响动应力集中系数的大小:当衬砌远离边界时,衬砌上所产生的动应力集中将会减弱.

参考文献:

[1] Pao Y H, Mow C C. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations [M]. New York: Crane and Russak, 1973: 154 – 183.

[2] 李凤明. 结构中弹性波与振动局部化问题的研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2003.

(Li Feng-ming. Study on elastic waves and vibration

localization in structures [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2003.)

[3] Tan A, Hirose S, Zhang C, *et al.* A 2D time-domain BEM for transient wave scattering analysis by a crack in anisotropic solids [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2005, 29 (6): 610 – 623.

[4] Li C Y, Weng G J. Dynamic stress intensity factor of a cylindrical interface crack with a functionally graded interlayer [J]. *Mechanics of Materials*, 2001, 33 (6): 325 – 333.

[5] 曾昭磷. 隧道地震反射法超前预报 [J]. 地球物理学报, 1994, 37 (2): 268 – 271.

(Zeng Zhao-huang. Prediction ahead of the tunnel face by the seismic reflection methods [J]. *Acta Geophysica Sinica*, 1994, 37 (2): 268 – 271.)

[6] 沈聚敏, 周锡元, 高小旺, 等. 抗震工程学 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.

(Shen Ju-min, Zhou Xi-yuan, Gao Xiao-wang, *et al.* Seismic engineering [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2000.)

[7] Song S H, Paulino G H. Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43 (16): 4830 – 4866.

[8] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates [J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1945, 12 (2): 69 – 77.