

# 转速及扭矩对啮合齿轮副非线性特性影响分析

张义民, 路金昌, 胡 鹏

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 综合考虑时变啮合刚度、啮合阻尼、齿侧间隙、啮合误差等因素,建立了两自由度直齿轮副非线性动力学模型.用4阶变步长 Runge-Kutta 算法对微分方程进行了数值求解,统计了迭代过程中轮齿啮合状态比例,研究了转速和扭矩对动态传递误差的影响.研究表明:随着转速增加,轮齿啮合状态发生变化,解释了动态传递误差的周期、混沌响应和误差幅值跳跃现象;随着扭矩的增大,出现跳跃现象的转速增加,幅值变化也增大,但轮齿冲击减少.

**关 键 词:** 齿轮动力学; 轮齿啮合状态; 动态传递误差; 转速; 扭矩

中图分类号: TH 132

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2014)03-0397-05

## Non-linear Characteristics Analysis of Gear Pairs with the Impact of Rotational Speed and Torque

ZHANG Yi-min, LU Jin-chang, HU Peng

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: LU Jin-chang, E-mail: lujinchang.happy@163.com)

**Abstract:** A nonlinear two-degree-of-freedom dynamics model for a spur gear pair system is developed by considering the time-varying stiffness, mesh damping, backlash and transmission error. The differential equations were solved by the fourth-order variable step size Runge-Kutta algorithm. The statistics of the proportion of tooth contact states in the iterative process were acquired, and the impact of the rotational speed and torque on dynamic transmission error was studied. It shown that the tooth mesh condition changes with the increase of rotational speed, which explains the cycle and chaos response of the dynamic transmission error and the error amplitude jump phenomena. With the increase of torque, jumping phenomenon of the rotational speed increased, the changes of amplitude also increased, but the tooth impact reduced.

**Key words:** gear dynamics; tooth contact state; dynamic transmission error; rotational speed; torque

齿轮传动作为一种常用的传动方式广泛应用于各类机械装备的传动系统,其振动特性会直接影响机械装备的性能和工作可靠性,因此,人们对其振动特性进行了深入的研究<sup>[1]</sup>. Kahraman 等<sup>[2-4]</sup>使用数值分析和谐波平衡法分析了一对具有齿侧间隙的直齿轮副的频响特性,研究了齿轮系统的次谐波响应和混沌响应,并通过试验台得到了验证. Theodossiades 等<sup>[5]</sup>建立了考虑时变啮合刚度和间隙的齿轮副非线性动力学模型,探讨了刚度、阻尼变化对系统周期响应的影响,表明参数

的不同组合会导致复杂的系统响应. 张锁怀等<sup>[6]</sup>研究了齿轮系统的拍击振动周期与激励周期的关系. Wang 等<sup>[7]</sup>建立了考虑时变啮合刚度、间隙和运动传递误差的准双曲面齿轮扭转振动模型,研究发现了齿轮系统存在的跳跃现象. 文献[8-9]利用相平面轨迹、Poincare 映射、FFT 频谱研究了啮合刚度、阻尼、外载荷及非线性支撑对系统特性的影响,得到了系统的周期、准周期及混沌运动规律. Cheon<sup>[10]</sup>提出了一种补偿啮合刚度变化的方法以减少齿轮的振动.

收稿日期: 2013-05-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51135003, U1234208); 长江学者和创新团队发展计划项目(IRT0816); “高档数控机床与基础制造装备”科技重大专项(2013ZX04011011).

作者简介: 张义民(1958-),男,吉林长春人,东北大学教授,博士生导师,教育部“长江学者奖励计划”特聘教授.

基于上述文献,本文综合考虑时变啮合刚度、啮合阻尼、齿侧间隙、啮合误差等因素,建立了两自由度直齿轮副非线性动力学模型.通过在四阶变步长 Runge – Kutta 求解过程中,统计齿轮啮合状态比例,分析转速、扭矩变化对动态传递误差的影响,可以直观地通过啮合状态的变化解释齿轮系统存在的跳跃现象.

## 1 齿轮副非线性动力学模型

由于支撑轴及轴承的刚性较大,忽略传动轴的横向和轴向变形,仅考虑轮齿的扭转振动,建立两自由度齿轮副扭转振动分析模型,如图 1 所示.

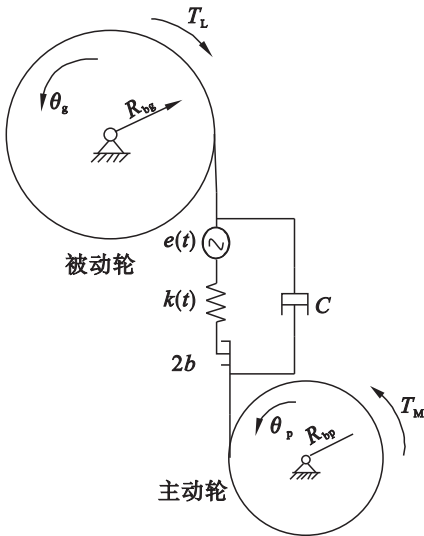


图 1 直齿轮副模型  
Fig. 1 Model of the spur gear pair

建立齿轮系统的动力学微分方程如下:

$$I_p \ddot{\theta}_p + CR_{bp}(R_{bp}\dot{\theta}_p - R_{bg}\dot{\theta}_g - \dot{e}(t)) + k(t)R_{bp}f(R_{bp}\theta_p - R_{bg}\theta_g - e(t)) = T_M, \quad (1a)$$

$$I_g \ddot{\theta}_g - CR_{bg}(R_{bp}\dot{\theta}_p - R_{bg}\dot{\theta}_g - \dot{e}(t)) - k(t)R_{bg}f(R_{bp}\theta_p - R_{bg}\theta_g - e(t)) = -T_L. \quad (1b)$$

式中: $\theta_p$  和  $\theta_g$  分别为主、被动齿轮的扭转角位移; $R_{bp}$  和  $R_{bg}$  为主、被动齿轮的基圆半径; $I_p$  和  $I_g$  为主、被动齿轮的转动惯量; $k(t)$  为齿轮副的综合啮合刚度; $C$  为齿轮副的啮合阻尼; $e(t)$  为轮齿综合啮合误差; $T_M$  和  $T_L$  为作用在主、被动齿轮上的转矩.

一般情况下, $k(t)$  和  $e(t)$  均是周期函数,频率等于齿轮啮合频率,可以展开成 Fourier 级数形式,本文均取一阶谐波分量,则有

$$k(t) = k_m + k_a \sin(\omega t) + k_b \cos(\omega t), \quad (2)$$

$$e(t) = e_a \sin(\omega t). \quad (3)$$

式中: $k_m$  为刚度的平均值; $k_a$  和  $k_b$  为一阶正弦分量幅值; $e_a$  为轮齿综合啮合误差幅值.

用  $x$  表示齿轮动态传递误差,即  $x = R_{bp}\theta_p - R_{bg}\theta_g - e(t)$ ,则间隙非线性函数  $f(x)$  为

$$f(x) = \begin{cases} x - b, & x > b; \\ 0, & -b \leq x \leq b; \\ x + b, & x < -b. \end{cases} \quad (4)$$

式中: $2b$  为齿轮副间隙;当  $f(x) = x - b$  时,轮齿处于正常啮合状态;当  $f(x) = 0$  时,轮齿处于分离状态;当  $f(x) = x + b$  时,啮合轮齿处于齿背啮合状态.

齿轮副等效质量  $m_e$ ,近似固有角频率  $\omega_n$  及轮齿的啮合阻尼  $C$  为

$$m_e = \frac{I_p I_g}{I_p R_{bg}^2 + I_g R_{bp}^2}, \quad (5)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_m}{m_e}}, \quad (6)$$

$$C = 2\zeta \sqrt{\frac{k_m I_p I_g}{I_p R_{bg}^2 + I_g R_{bp}^2}}. \quad (7)$$

通常,啮合阻尼比  $\zeta$  为 0.03 ~ 0.17.

由于微分方程组的强非线性,无法求得其解析解,这里采用 4 阶变步长 Runge – Kutta 算法求解,迭代过程中统计  $f(x)$  三种状态的比例.

## 2 转速变化对系统的影响

本文以某机床动力伺服刀架中的一对动力传动齿轮为例进行研究,具体参数如表 1 所示.

表 1 齿轮系统参数  
Table 1 Gear system parameters

参数	参数值
主被动齿轮齿数 $z_p/z_g$	17/26
模数 $m$	4
压力角 $\alpha/(^\circ)$	20
转动惯量 $I_p/I_g/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$5.95 \times 10^{-3}/6.90 \times 10^{-3}$
齿轮副间隙 $2b/\mu\text{m}$	100
刚度均值 $k_m/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$2.27 \times 10^8$
刚度一阶正弦幅值 $k_a/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$-1.3 \times 10^7$
刚度一阶余弦幅值 $k_b/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$-3.1 \times 10^7$
啮合误差幅值 $e_a/\mu\text{m}$	10
啮合阻尼比 $\zeta$	0.1
输入扭矩 $T_M/(\text{N}\cdot\text{m})$	30
负载扭矩 $T_L/(\text{N}\cdot\text{m})$	45

根据式(6)可以计算出达到该齿轮副的固有频率的激励转速约为 6 000 r/min. 保持其他参数

不变,改变转速,研究 0 ~ 2 倍固有频率激励转速范围内转速对齿轮动态传递误差的影响.

图 2 ~ 图 4 为不同转速下动态传递误差的时域、FFT 频谱、相图及 Poincare 映射图;图 5 为研究转速范围内的动态传递误差幅值变化及相应的啮合状态比例统计图.

由图 2 可见,转速为 3 000 r/min 时,动态传递误差仍为单周期响应,FFT 频谱出现倍频  $nf_0$  ( $n$  为整数). 从图 5b 中可以看出,此转速下正常齿面啮合状态及轮齿分离状态各占 50%, 齿轮为单边冲击.

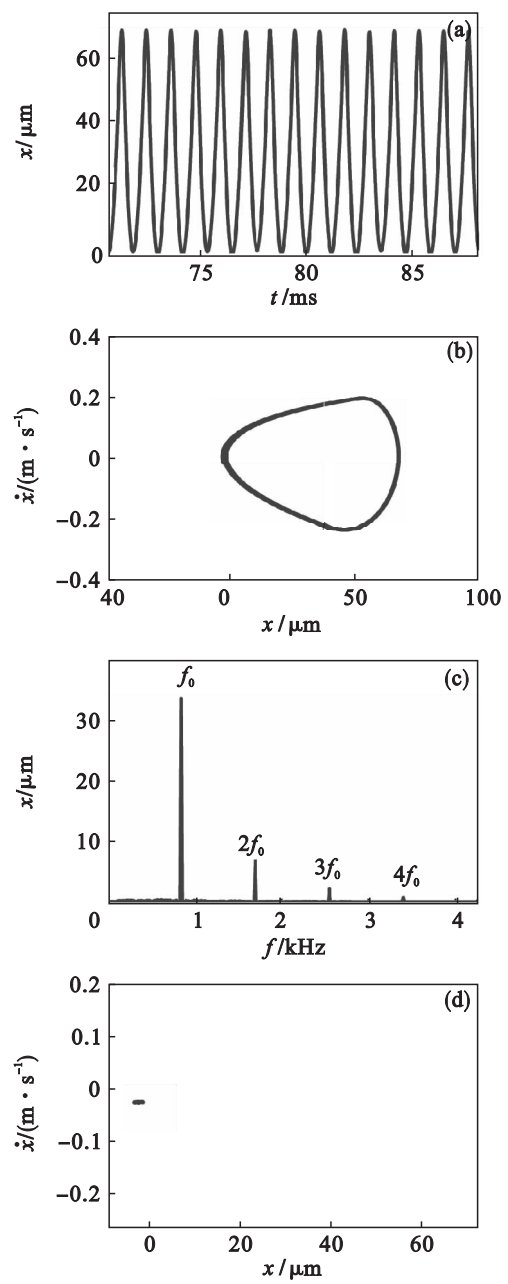


图 2 转速为 3 000 r/min 时系统动态响应  
Fig. 2 Dynamic response at the rotational speed of 3 000 r/min  
(a)—时域图; (b)—相图;  
(c)—FFT 频谱; (d)—Poincare 映射.

随着转速的增高,当转速为 4 500 r/min 时,由图 3 可见,Poincare 映射为 2 个点,动态传递误差为两周期响应,FFT 频谱中出现  $f_0/2$  及其倍频  $nf_0/2$  ( $n$  为整数). 图 5b 中显示,在此转速下,正常齿面啮合状态占 60%, 轮齿分离状态占 40%, 齿轮存在单边冲击.

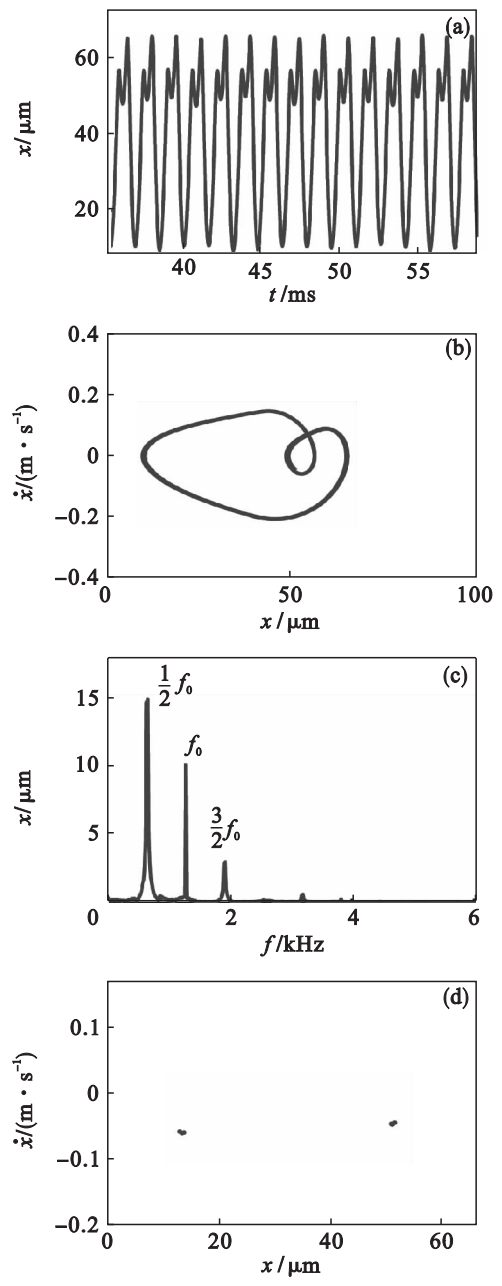


图 3 转速为 4 500 r/min 时系统的动态响应  
Fig. 3 Dynamic response at the rotational speed of 4 500 r/min  
(a)—时域图; (b)—相图;  
(c)—FFT 频谱; (d)—Poincare 映射.

转速提高到 5 000 r/min 时,由图 4 的相图及 Poincare 映射图看出,此时动态传递误差为混沌响应状态. FFT 频谱出现连续的频率成分,但  $f_0/2$  和  $f_0$  分量明显. 如图 5 所示,此转速附近,正常齿

面啮合状态和轮齿分离状态比例波动明显,传动误差幅值混沌无序,该转速附近为混沌响应.

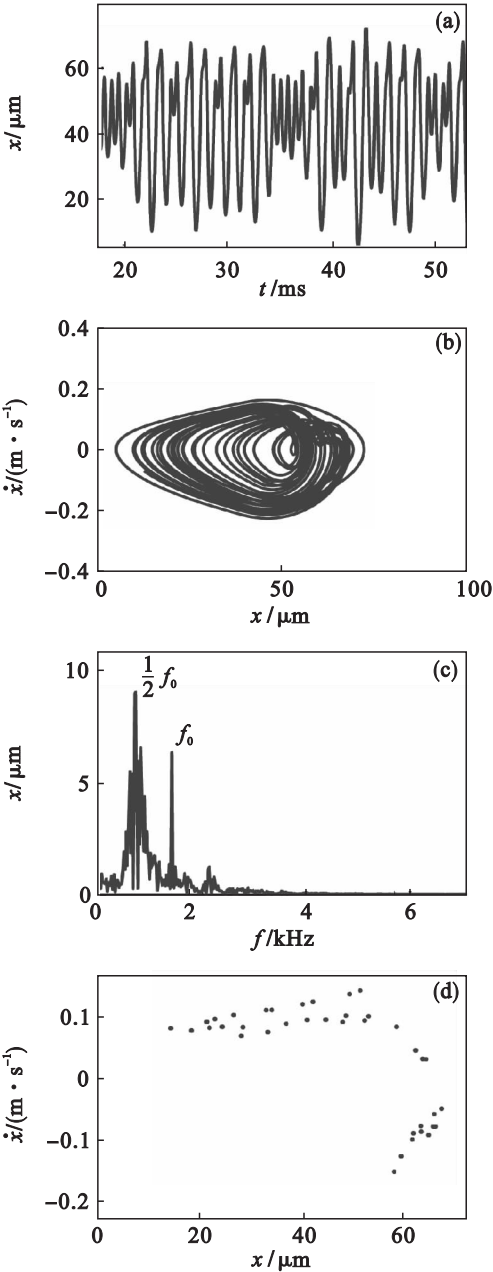


图4 转速为 5 000 r/min 时的系统动态响应  
Fig. 4 Dynamic response at the rotational speed of 5 000 r/min  
(a)—时域图; (b)—相图;  
(c)—FFT 频谱; (d)—Poincare 映射.

3 扭矩变化对系统的影响

改变作用在齿轮上的扭矩,保持其他参数不变,研究动态传递误差幅值在 0 ~ 2 倍固有频率激励转速范围内的变化.

如图 5a 所示,输入扭矩为 30 N·m 时,在转速 2 600 r/min 时幅值出现跳跃,由 10 μm 变为 30 μm;图 5b 显示,此时轮齿从非冲击突变为单

边冲击状态.在转速为 5 700 r/min 时幅值也出现了跳跃,呈现为混沌无序状态,正常齿面啮合状态和轮齿分离状态比例出现了明显的波动.经历混沌区后,在 7 000 ~ 9 000 r/min 范围内幅值稳定,此时轮齿主要为双边冲击.

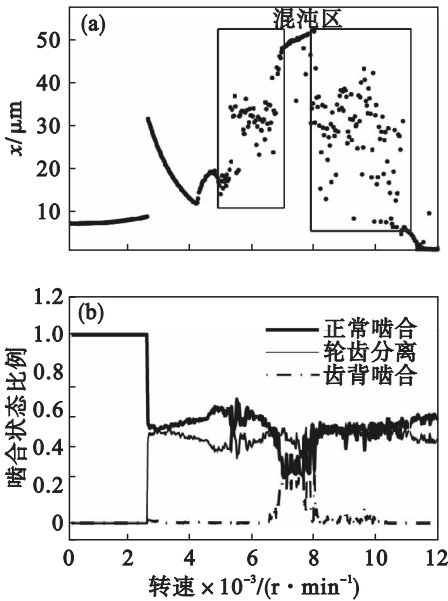


图5 输入扭矩 30 N·m 时系统动态响应  
Fig. 5 Dynamic response when the input torque is 30 N·m  
(a)—不同转速下动态传递误差幅值;  
(b)—不同转速下啮合状态比例.

随着扭矩增大,如图 6 所示,输入扭矩为 70 N·m 时,在转速 3 300 r/min 时幅值出现跳跃,

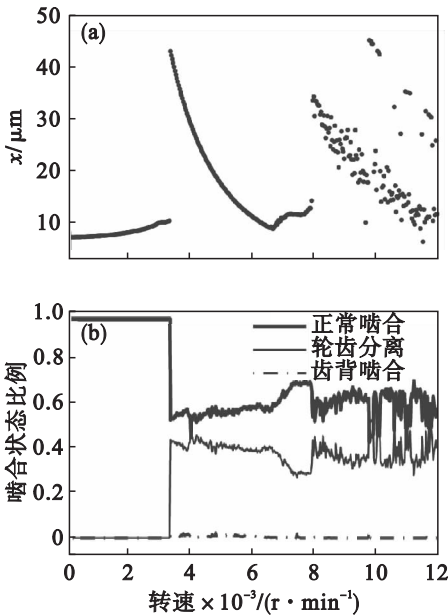


图6 输入扭矩 70 N·m 时系统动态响应  
Fig. 6 Dynamic response when the input torque is 70 N·m  
(a)—不同转速下动态传递误差幅值;  
(b)—不同转速下啮合状态比例.

由 10  $\mu\text{m}$  变为 43  $\mu\text{m}$ , 此时轮齿从非冲击突变为单边冲击状态. 在转速 8 000 r/min 时也出现了跳跃, 因为此时正常齿面啮合状态和轮齿分离状态比例发生了明显变化, 在此扭矩下, 齿背啮合状态比例没有出现显著变化, 始终在 1% 左右.

当扭矩为 150 N·m 时, 如图 7 所示, 幅值出现跳跃现象的转速增大到 4 100 r/min, 幅值变化也明显增大, 由 14  $\mu\text{m}$  变为 60  $\mu\text{m}$ , 同样在 9 900 r/min 也发生了跳跃.

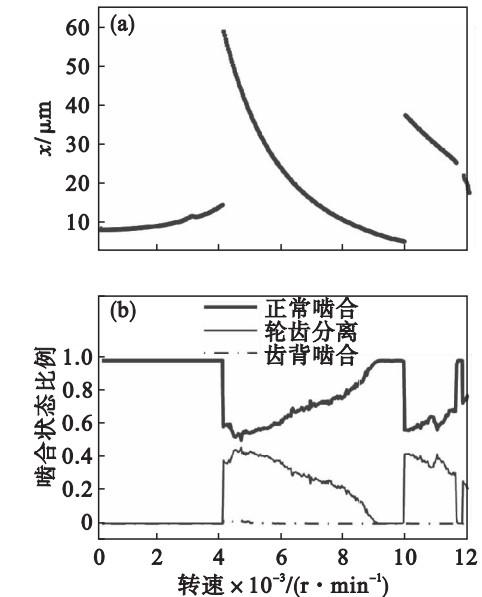


图 7 输入转矩 150 N·m 时系统动态响应  
Fig. 7 Dynamic response when the input torque is 150 N·m  
(a) —不同转速下动态传递误差幅值;  
(b) —不同转速下啮合状态比例.

随着扭矩的增大, 出现跳跃现象的转速随之增大, 且跳跃的幅值也随之增大, 混沌响应区随之减少, 如图 8 所示. 从图 5 ~ 图 7 还可以看出, 随着扭矩的增大, 正常齿面啮合状态比例与轮齿分离状态比例差距越来越大, 表明冲击减少.

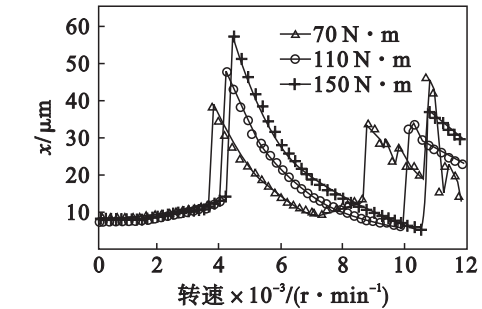


图 8 转矩对动态误差幅值的影响  
Fig. 8 Torque effects on the DTE amplitude

## 4 结 论

1) 用 Runge – Kutta 算法求解齿轮非线性动

力学方程时, 统计迭代过程中齿轮啮合状态比例, 可以方便地分析系统的响应.

2) 随着转速的增加, 齿轮啮合状态发生变化, 解释了动态传递误差的周期、混沌响应. 动态传递误差幅值跳跃的现象是由轮齿啮合状态的突变引起的.

3) 随着扭矩的增加, 出现跳跃现象的转速随之增加, 且跳跃的幅值变化也在增大. 正常齿面啮合状态比例与轮齿分离状态比例差距变大, 冲击减少.

## 参考文献:

[1] 王建军, 李其汉, 李润方. 齿轮系统非线性振动研究进展 [J]. 力学进展, 2005, 31(1): 37–51.  
(Wang Jian-jun, Li Qi-han, Li Run-fang. Research advances for nonlinear vibration of gear transmission systems [J]. *Advances in Mechanics*, 2005, 31(1): 37–51.)

[2] Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a spur gear pair [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142(1): 49–75.

[3] Kahraman A, Singh R. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance nonlinearities in a geared system [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 146(1): 135–156.

[4] Tamminana V K, Kahraman A, Vijayakar S. A study of the relationship between the dynamic factors and the dynamic transmission error of spur gear pairs [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2007, 129(1): 75–84.

[5] Theodossiades S, Natsiavas S. Non-linear dynamics of gear-pairs systems with periodic stiffness and backlash [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 229(2): 287–310.

[6] 张锁怀, 沈允文, 董海军, 等. 单级齿轮系统的拍击振动模型 [J]. 机械工程学报, 2002, 38(12): 16–20.  
(Zhang Suo-huai, Shen Yun-wen, Dong Hai-jun, et al. Rattling model of a one-stage gear system [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2002, 38(12): 16–20.)

[7] Wang J, Lim T C, Li M F. Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 308(1/2): 302–329.

[8] Cai W, Chang J. Nonlinear analysis for gear pair system supported by long journal bearings under nonlinear suspension [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(4): 569–583.

[9] 苏程, 尹朋朋. 齿轮系统非线性动力学特性分析 [J]. 中国机械工程, 2011, 22(16): 1922–1928.  
(Su Cheng, Yin Peng-peng. Analysis of nonlinear dynamics in a spur gear pair system [J]. *China Mechanical Engineering*, 2011, 22(16): 1922–1928.)

[10] Cheon G J. Numerical study on reducing the vibration of spur gear pairs with phasing [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(19): 3915–3927.