

具有短时延和丢包的网络控制系统鲁棒 H_∞ 控制

李 玮¹, 王 青¹, 董朝阳²

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191; 2. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 研究了一类具有网络诱导时延和数据包丢失的不确定网络控制系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 通过增广系统状态, 将反馈通道和前向通道均存在短时延和丢包的网络控制系统建模为包含 4 个子系统的切换系统, 基于增广系统模型提出新形式的静态输出反馈控制律. 结合时窗丢包率概念与平均驻留时间方法, 得到保证闭环网络控制系统鲁棒渐近稳定且满足鲁棒加权 H_∞ 性能指标的充分条件. 基于线性矩阵不等式处理技巧与锥补线性化算法, 给出双通道丢包依赖的变增益输出反馈鲁棒 H_∞ 控制器设计步骤. 设计实例验证了所提控制方法的有效性.

关 键 词: 网络控制系统; 网络诱导时延; 数据包丢失; 切换系统; 鲁棒 H_∞ 控制

中图分类号: TP 273

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2014)06-0774-06

Robust H_∞ Control of Networked Control Systems with Short Delays and Packet Dropouts

LI Wei¹, WANG Qing¹, DONG Chao-yang²

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China. Corresponding author: LI Wei, E-mail: liwei1900@gmail.com)

Abstract: The H_∞ control problem was addressed for a class of networked control systems (NCSs) with network-induced delays and packet dropouts. For the case that short delays and packet dropouts existed in both the backward and the forward channels, the NCS was modeled as a switched system with four subsystems via system states augmentation. A new type of static output feedback control law was proposed based on the augmented system model. By using the notion of time-window packet dropout rate and the average dwell time method, sufficient conditions was obtained for the robust stability and the weighted H_∞ performance of the closed-loop NCS. To achieve synthesis of the output feedback robust H_∞ controller, for which the gain varied according to the mode of packet dropouts of dual channels, design procedures were given by applying the linear matrix inequality technique and the cone complementarity linearization algorithm. The effectiveness of the proposed approach was validated by a design example.

Key words: networked control systems (NCSs); network-induced delays; packet dropouts; switched systems; robust H_∞ control

网络控制系统(networked control systems, NCSs)以其布线简单、结构灵活、易于扩展和维护等优点,已在工业控制领域得到广泛应用.在具备诸多优点的同时,网络控制系统也存在网络诱导时延、数据丢包等固有问题,给控制系统设计带来新的挑战^[1-2].

由于NCS既包含由微分方程或差分方程描述的被控对象动态,又包含具有跳变特性的时延、丢包等网络动态,因此特别适合采用切换系统理论^[3-4]研究NCS的建模、分析与控制问题.文献[5]将NCS的有界连续丢包现象视为变采样问题,将丢包NCS建模为系统参数依采样率变化的

切换系统,进而给出保证系统对任意有界连续丢包过程一致稳定的输出反馈控制器设计方法.文献[6]提出一种“状态预估+变反馈增益”的控制策略实现对网络时延的补偿,将该框架下的闭环NCS建模为系统参数随时延变化的切换系统,进而给出对时变网络时延一致稳定的 H_∞ 控制器设计方法.文献[7-8]考虑一类反馈通道和前向通道均存在网络丢包的NCS,按照各通道是否发生丢包将其描述为具有4个子系统的切换系统,进而基于平均驻留时间(average dwell time, ADT)方法给出保证系统对满足ADT约束的丢包过程一致稳定的充分条件.

以上文献虽然成功地将切换系统理论方法应用于NCS的研究,但仍存在如下不足:1)建模方面,文献[5]的变采样处理方法不适于处理考虑随机扰动的 H_∞ 控制问题,且文献[5-8]均未考虑短时延所产生的一步时滞现象^[9].2)分析方面,文献[5-6]所采用的切换Lyapunov函数方法实际上要求被控对象开环稳定;而文献[7-8]虽然基于平均驻留时间方法放宽了这一条件,但其研究仅局限于稳定性问题,相关结果推广至 H_∞ 控制则尚需处理.

本文研究一类具有短时延和丢包的NCS的鲁棒 H_∞ 控制问题.通过增广系统状态,将NCS按双通道丢包情况建模为具有4个子系统的切换线性系统.基于增广系统模型提出新形式的静态输出反馈控制律.结合时窗丢包率概念与平均驻留时间方法给出低保守性的鲁棒 H_∞ 控制器设计准则.

1 问题描述

本文所研究的NCS如图1所示,其中前向通道和反馈通道均采用网络传输数据且存在时延和丢包现象.对图1所示NCS有如下假设:

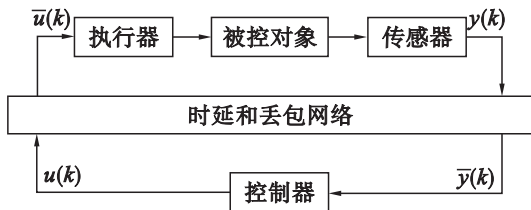


图1 NCS结构图

Fig. 1 The structure of the NCS

1) 传感器、控制器和执行器均采用时钟驱动方式,且具有相同的采样周期;

2) 各通道网络时延均小于采样周期;

3) 当反馈通道(或前向通道)发生丢包时,控制器(或执行器)输入沿用上一采样时刻的数据.

考虑如下离散时间不确定被控对象模型:

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= \hat{A}x(k) + \hat{B}\tilde{u}(k) + \hat{B}_\omega\omega(k), \\ z(k) &= \hat{C}x(k) + \hat{D}\tilde{u}(k) + \hat{D}_\omega\omega(k), \\ y(k) &= Gx(k). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{u}(k) \in \mathbf{R}^m$, $y(k) \in \mathbf{R}^p$, $\omega(k) \in \mathbf{R}^q$ 和 $z(k) \in \mathbf{R}^r$ 分别为系统状态、控制输入、测量输出、扰动输入和被调输出; \hat{A} , \hat{B} , \hat{B}_ω , \hat{C} , \hat{D} 和 \hat{D}_ω 为适当维数的不确定参数矩阵,满足

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} & \hat{B}_\omega \\ \hat{C} & \hat{D} & \hat{D}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B_\omega \\ C & D & D_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}.$$

其中: A , B , B_ω , C , D 和 D_ω 为标称系统参数矩阵; E_1 , E_2 , F_1 , F_2 和 F_3 为不确定结构矩阵; Δ 为不确定性矩阵,且满足 $\Delta^T \Delta \leq I$. G 为适当维数的常值矩阵.

分别以 $\alpha_k \in \{0, 1\}$ 和 $\beta_k \in \{0, 1\}$ 表示NCS反馈通道和前向通道在采样时刻 k 的丢包情况, α_k (或 β_k) 取0和1分别对应于反馈通道(或前向通道)无丢包和发生丢包的情况.依前述假设,时延和丢包网络动态可表为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}(k) &= (1 - \alpha_{k-1})y(k-1) + \alpha_{k-1}\tilde{y}(k-1), \\ \tilde{u}(k) &= (1 - \beta_{k-1})u(k-1) + \beta_{k-1}\tilde{u}(k-1). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

注1 不同于文献[7-8]中的双通道丢包网络模型,式(2)模型同时考虑了网络诱导时延的影响.短时延的存在使得系统在 k 时刻的数据更新依赖于 $k-1$ 时刻的采样数据和网络状况.

定义增广状态向量

$$\xi(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \tilde{\mathbf{u}}^T(k-1) \quad \mathbf{u}^T(k-1) \quad \tilde{\mathbf{y}}^T(k-1) \quad \mathbf{y}^T(k-1)]^T,$$

由式(1)和式(2)可得如下开环NCS模型:

$$\left. \begin{aligned} \xi(k+1) &= \hat{\Phi}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})\xi(k) + \Gamma u(k) + \hat{F}_\omega \omega(k), \\ z(k) &= \hat{\Psi}(\beta_{k-1})\xi(k) + \hat{D}_\omega \omega(k). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中:

$$\hat{\Phi}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) = \begin{bmatrix} \hat{A} & \beta_{k-1}\hat{B} & (1-\beta_{k-1})\hat{B} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{k-1}I & (1-\beta_{k-1})I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{k-1}I & (1-\alpha_{k-1})I \\ G & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = [0 \quad 0 \quad I \quad 0 \quad 0]^T, \hat{F}_\omega = [\hat{B}_\omega^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$\hat{\Psi}(\beta_{k-1}) = [\hat{C} \quad \beta_{k-1}\hat{D} \quad (1-\beta_{k-1})\hat{D} \quad 0 \quad 0].$$

选取如下信号作为系统(3)的测量输出:

$$\eta(k) = [\tilde{\mathbf{y}}^T(k) \quad \tilde{\mathbf{y}}^T(k-1) \quad \tilde{\mathbf{u}}^T(k-1) \quad \mathbf{u}^T(k-1)]^T$$

则系统(3)的输出方程为

$$\boldsymbol{\eta}(k)=\boldsymbol{H}(\alpha_{k-1})\boldsymbol{\xi}(k). \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{H}(\alpha_{k-1})=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha_{k-1}\boldsymbol{I} & (1-\alpha_{k-1})\boldsymbol{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

注 2 式(4)所示系统输出在满足信号可测量性的前提下,尽可能多地包含了系统(3)的状态信息,从而为输出反馈控制综合提供了最大的设计自由度. 其中, $\hat{\mathbf{y}}(k)$, $\hat{\mathbf{y}}(k-1)$ 和 $\mathbf{u}(k-1)$ 位于控制器端, 控制器通过数据缓存可直接访问; $\hat{\mathbf{u}}(k-1)$ 位于执行器端, 控制器可基于传输应答机制得到 β_{k-1} , 进而依式(2)以递归方式获取 $\hat{\mathbf{u}}(k-1)$.

如式(3)和式(4)所示, 系统在 k 时刻的动态依赖于 $(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})$ 的取值. 若将 $(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})$ 取值为 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ 和 $(1,1)$ 时的系统动态分别定义为子系统 $\Sigma_1 \sim \Sigma_4$, 则式(3), (4)所对应的开环系统可表示为如下切换系统:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(k+1) &= \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\xi}(k) + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}(k) + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\omega}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{z}(k) &= \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\xi}(k) + \hat{\boldsymbol{D}}_{\omega}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \boldsymbol{\eta}(k) &= \boldsymbol{H}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\xi}(k). \end{aligned} \right\} : \Sigma_{\sigma(k)} \tag{5}$$

其中: $\sigma: \mathbf{N} \rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, 为切换信号. 不确定参数矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_i, \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\omega}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i$ 和 $\hat{\boldsymbol{D}}_{\omega}$ 满足

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i & \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\omega} \\ \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i & \hat{\boldsymbol{D}}_{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i & \boldsymbol{\Gamma}_{\omega} \\ \boldsymbol{\Psi}_i & \boldsymbol{D}_{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{E}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{E}}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} [\bar{\boldsymbol{F}}_{1,i} \quad \bar{\boldsymbol{F}}_2], \forall i \in \Omega.$$

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Phi}_4 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_{\omega} &= [\boldsymbol{B}_{\omega}^T \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T, \\ \boldsymbol{\Psi}_1 &= \boldsymbol{\Psi}_3 = [\boldsymbol{C} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{D} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}], \boldsymbol{\Psi}_2 = \boldsymbol{\Psi}_4 = [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{D} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}], \\ \bar{\boldsymbol{E}}_1 &= [\bar{\boldsymbol{E}}_1^T \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T, \bar{\boldsymbol{E}}_2 = \bar{\boldsymbol{E}}_2, \bar{\boldsymbol{F}}_2 = \bar{\boldsymbol{F}}_3, \\ \bar{\boldsymbol{F}}_{1,1} &= \bar{\boldsymbol{F}}_{1,3} = [\bar{\boldsymbol{F}}_1 \quad \mathbf{0} \quad \bar{\boldsymbol{F}}_2 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}], \bar{\boldsymbol{F}}_{1,2} = \bar{\boldsymbol{F}}_{1,4} = [\bar{\boldsymbol{F}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{F}}_2 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}], \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{H}_3 = \boldsymbol{H}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

采用如下静态输出反馈切换控制器:

$$\mathbf{u}(k) = \boldsymbol{K}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\eta}(k). \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{K}_i (i \in \Omega)$ 为控制器增益.

由式(5)和式(6)可得如下闭环切换系统方程:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(k+1) &= \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{cl}, \sigma(k)}\boldsymbol{\xi}(k) + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\omega}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{z}(k) &= \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\xi}(k) + \hat{\boldsymbol{D}}_{\omega}\boldsymbol{\omega}(k). \end{aligned} \right\} : \Sigma_{\text{cl}, \sigma(k)} \tag{7}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{cl}, i} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{H}_i, \forall i \in \Omega$.

注 3 由式(7)可见, 若被控对象本身不稳定, 则闭环子系统 $\Sigma_{\text{cl}, 2} \sim \Sigma_{\text{cl}, 4}$ 必不稳定, 而子系统 $\Sigma_{\text{cl}, 1}$ 的稳定性可通过合理设计控制器(6)得以保证. 对于这类包含不稳定子系统的切换系统, 用于研究任意切换条件下稳定性的公共 Lyapunov 函数方法^[3]和切换 Lyapunov 函数方法^[10]将不再适用. 而平均驻留时间方法^[11]则为解决该问题提供了有力的分析工具.

定义 1 对给定的切换信号 σ 和任意 $k > 0$, 以 $N_{\sigma}(0, k)$ 表示 σ 在时间段 $[0, k)$ 内的切换次数. 若存在正整数 N_0 和 τ_a , 满足 $N_{\sigma}(0, k) \leq N_0 + k/\tau_a, \forall k > 0$, 则分别称 τ_a 和 N_0 为平均驻留时间和抖动界. 不失一般性, 取 $N_0 = 0$.

定义 2 对任意 $0 \leq \kappa \leq k$, 以 $D(\kappa, k)$ 表示网络控制系统在时间段 $[\kappa, k)$ 内的丢包数. 若存在 $T \in \mathbf{N}^+$, 满足 $\frac{D(\kappa, \kappa+T)}{2T} \leq r(T), \forall \kappa \geq 0$, 则称 $r(T)$ 为网络控制系统以 T 为时窗长度的时窗丢包率.

定义 3 考虑闭环系统(7), 若对给定的 $\gamma > 0, 0 < \lambda < 1$ 以及所有容许的不确定性, 满足: 1) 系统渐近稳定; 2) 零初始条件下, 扰动输入 $\boldsymbol{\omega}(k)$ 和被调输出 $\mathbf{z}(k)$ 满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathbf{z}^T(k) \mathbf{z}(k) \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\omega}^T(k) \boldsymbol{\omega}(k)$. 则称系统鲁棒渐近稳定且具有鲁棒加权 H_{∞} 性能指标 γ .

引理 1 给定适当维数矩阵 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$, 其中 \boldsymbol{Y} 为对称阵, 则 $\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}^T\boldsymbol{\Delta}^T\boldsymbol{M}^T < \mathbf{0}$ 对所有 $\boldsymbol{\Delta}^T\boldsymbol{\Delta} \leq \boldsymbol{I}$ 成立, 当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得 $\boldsymbol{Y} + \varepsilon\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{N} < \mathbf{0}$.

本文研究目的: 设计静态输出反馈切换控制器(6), 使得闭环不确定切换系统(7)鲁棒渐近稳定且满足给定的鲁棒加权 H_{∞} 性能指标.

2 主要结果

2.1 NCS 的鲁棒 H_{∞} 性能分析

定理 1 考虑闭环系统(7), 对给定的标量 $0 < \lambda_- < \lambda^* < 1, \lambda_+ \geq 1, \gamma > 0$ 和 $T > 0$, 若存在正

定函数 $V_i(\xi(k)) : \mathbf{R}^{n+2m+2p} \rightarrow \mathbf{R}^+, i \in \Omega$ 和 $\mu > 1$, 使得对所有容许的不确定性, 满足

$$V_i(\xi(k+1)) \leq \begin{cases} \lambda_- V_i(\xi(k)) - z^T(k)z(k) + \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k), i=1; \\ \lambda_+ V_i(\xi(k)) - z^T(k)z(k) + \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k), \forall i \in \{2, 3, 4\}. \end{cases} \quad (8)$$

$$V_i(\xi(k)) \leq \mu V_j(\xi(k)), \forall (i, j) \in \Omega \times \Omega, i \neq j. \quad (9)$$

且时窗丢包率与平均驻留时间分别满足

$$r(T) \leq r^*(T) = \frac{\ln \lambda_-^* - \ln \lambda_-}{2(\ln \lambda_+ - \ln \lambda_-)}, \quad (10)$$

$$\tau_a \geq \tau_a^* = -\frac{\ln \mu}{\ln \lambda_-^*}. \quad (11)$$

则闭环系统(7)鲁棒渐近稳定且具有如下鲁棒加权 H_∞ 性能指标:

$$\bar{\gamma} = \gamma \left(\max \left\{ \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-^*} \right)^{2T}, \left(\frac{\lambda_-^*}{\lambda_-} \right)^T \frac{\lambda_-^* (1 - \lambda_-)}{\lambda_- (1 - \lambda_-^*)} \right\} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

证明 对任意 $0 \leq \kappa \leq k$, 以 $\Gamma_i(\kappa, k)$ 表示切换系统(7)在时间段 $[\kappa, k]$ 内子系统 $\Sigma_{cl,i}$ 的激活时间, 以 $\Gamma_-(\kappa, k)$ 和 $\Gamma_+(\kappa, k)$ 分别表示稳定子系统和不稳定子系统的激活时间.

$$\begin{aligned} & \text{为系统(7)选取准 Lyapunov 函数 } V(k, \xi(k)) = V_{\sigma(k)}(\xi(k)). \text{ 由式(8)和式(9)得} \\ & V_{\sigma(k)}(\xi(k)) \leq \mu^{N_{\sigma(0,k)}} \lambda_-^{\Gamma_-(0,k)} \lambda_+^{\Gamma_+(0,k)} V_{\sigma(0)}(\xi(0)) - \\ & \sum_{s=0}^{k-1} \mu^{N_{\sigma(s,k)}} \lambda_-^{\Gamma_-(s,k)} \lambda_+^{\Gamma_+(s,k)} \phi(s) = e^{N_{\sigma(0,k)} \ln \mu + \varphi(0,k)} V_{\sigma(0)}(\xi(0)) - \\ & \sum_{s=0}^{k-1} e^{N_{\sigma(s,k)} \ln \mu + \varphi(s,k)} \phi(s). \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $\phi(k) = z^T(k)z(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k)$, $\varphi(s, k) = \Gamma_-(s, k) \ln \lambda_- + \Gamma_+(s, k) \ln \lambda_+$. 分两种情况估计 $\varphi(s, k)$:

i) 若 $k-s \geq T$, 假设 $(m-1)T < s \leq mT < nT \leq k < (n+1)T, m \in \mathbf{N}^+, n \in \mathbf{N}^+$, 则有

$$\begin{aligned} \varphi(s, k) & \leq \sum_{l=m}^{n-1} [\Gamma_-(lT, (l+1)T) \ln \lambda_- + \\ & \Gamma_+(lT, (l+1)T) \ln \lambda_+] + \\ & (k-nT) \ln \lambda_+ + (mT-s) \ln \lambda_+. \end{aligned} \quad (14)$$

由式(10)和时窗丢包率定义可得

$$\Gamma_+(lT, (l+1)T)/T \leq D(lT, (l+1)T)/T \leq 2r(T) \leq (\ln \lambda_-^* - \ln \lambda_-)/(\ln \lambda_+ - \ln \lambda_-). \quad (15)$$

将式(15)代入式(14)可得

$$\begin{aligned} \varphi(s, k) & \leq (n-m)T \ln \lambda_-^* + (k-nT) \ln \lambda_+ + \\ & (mT-s) \ln \lambda_+ = (k-s) \ln \lambda_-^* + \\ & (k-nT)(\ln \lambda_+ - \ln \lambda_-^*) + (mT-s) \\ & (\ln \lambda_+ - \ln \lambda_-^*) \leq (k-s) \ln \lambda_-^* + \\ & 2T(\ln \lambda_+ - \ln \lambda_-^*). \end{aligned} \quad (16)$$

ii) 若 $k-s < T$, 假设 $nT \leq s < k < (n+1)T$,

$n \in \mathbf{N}$, 则有

$$\begin{aligned} \varphi(s, k) & \leq \Gamma_-(nT, (n+1)T) \ln \lambda_- + \\ & \Gamma_+(nT, (n+1)T) \ln \lambda_+ - \\ & [T - (k-s)] \ln \lambda_-. \end{aligned} \quad (17)$$

将式(15)代入式(17)可得

$$\begin{aligned} \varphi(s, k) & \leq T \ln \lambda_-^* - [T - (k-s)] \ln \lambda_- = (k-s) \ln \lambda_-^* + \\ & [T - (k-s)] (\ln \lambda_-^* - \ln \lambda_-) \leq \\ & (k-s) \ln \lambda_-^* + T(\ln \lambda_-^* - \ln \lambda_-). \end{aligned} \quad (18)$$

综合式(16)和式(18), 可得

$$e^{\varphi(s, k)} \leq c(\lambda_-^*)^{k-s}. \quad (19)$$

其中 $c = \max \{ (\lambda_+/\lambda_-^*)^{2T}, (\lambda_-^*/\lambda_-)^T \}$.

以下给出闭环系统(7)鲁棒渐近稳定性和鲁棒加权 H_∞ 性能证明:

1) 鲁棒渐近稳定性. 考虑无扰条件下的闭环系统(7), 由式(13), 式(11)和式(19)可得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(\xi(k)) & \leq e^{N_{\sigma(0,k)} \ln \mu + \varphi(0,k)} V_{\sigma(0)}(\xi(0)) \leq \\ & c \lambda^k V_{\sigma(0)}(\xi(0)). \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\lambda = (\lambda_-^*)^{1-\tau_a^*/\tau_a}$. 由 $\lambda_-^* < 1$ 和式(11)显然有 $\lambda < 1$, 故闭环系统(7)鲁棒渐近稳定.

2) 鲁棒加权 H_∞ 性能. 考虑零初始条件下的闭环系统(7), 由式(13)和式(19)可得

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{k-1} e^{-N_{\sigma(0,s)} \ln \mu + \varphi(s,k)} z^T(s)z(s) \leq \sum_{s=0}^{k-1} e^{-N_{\sigma(0,s)} \ln \mu + \varphi(s,k)} \\ & \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s) \leq \sum_{s=0}^{k-1} e^{\varphi(s,k)} \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s) \leq \\ & \sum_{s=0}^{k-1} c(\lambda_-^*)^{k-s} \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s). \end{aligned} \quad (21)$$

另由式(11)和 $\varphi(s, k)$ 定义, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{k-1} e^{-N_{\sigma(0,s)} \ln \mu + \varphi(s,k)} z^T(s)z(s) \geq \\ & \sum_{s=0}^{k-1} (\lambda_-^*)^s (\lambda_-)^{k-s} z^T(s)z(s). \end{aligned} \quad (22)$$

综合式(21)和式(22), 有

$$\sum_{s=0}^{k-1} (\lambda_-^*)^s (\lambda_-)^{k-s} z^T(s)z(s) \leq \sum_{s=0}^{k-1} c(\lambda_-^*)^{k-s} \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s). \quad (23)$$

对不等式(23)左端从 $k=1$ 到 $k=\infty$ 求和, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{k-1} (\lambda_-^*)^s (\lambda_-)^{k-s} z^T(s)z(s) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=s+1}^{\infty} (\lambda_-^*)^s (\lambda_-)^{k-s} \\ & z^T(s)z(s) = \frac{\lambda_-}{1 - \lambda_-} \sum_{s=0}^{\infty} (\lambda_-^*)^s z^T(s)z(s). \end{aligned} \quad (24)$$

对式(23)右端进行相同处理, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{k-1} c(\lambda_-^*)^{k-s} \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s) = \frac{\lambda_-^*}{1 - \lambda_-^*} \\ & \sum_{s=0}^{\infty} c r^2 \omega^T(s)\omega(s). \end{aligned} \quad (25)$$

由式(23)~式(25)得

$$\sum_{s=0}^{\infty}(\lambda_-^*)^s z^T(s) z(s) \leq \bar{\gamma}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \omega^T(s) \omega(s).$$

即闭环系统(7)满足鲁棒加权 H_∞ 性能指标 $\bar{\gamma}$.

证毕.

2.2 NCS 的鲁棒 H_∞ 控制器设计

定理 2 给定常数 $0 < \lambda_- < \lambda_-^* < 1, \lambda_+ \geq 1, \gamma > 0$ 和 $T > 0$, 若存在适当维数矩阵 $P_i > 0, K_i$, 标量 $\varepsilon_i > 0$ 和 $\mu > 1, i \in \Omega$, 使得 $\forall (i, j) \in \Omega \times \Omega, i \neq j$, 满足

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i P_i & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 I & * & * & * \\ \Phi_i + \Gamma K_i H_i & \Gamma_\omega & -P_i^{-1} + \varepsilon_i \bar{E}_1 \bar{E}_1^T & * & * \\ \Psi_i & D_\omega & \varepsilon_i \bar{E}_2 \bar{E}_1^T & -I + \varepsilon_i \bar{E}_2 \bar{E}_2^T & * \\ \bar{F}_{1,i} & \bar{F}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{26}$$

$$P_i \leq \mu P_j. \tag{27}$$

其中: $\lambda_1 = \lambda_-, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_+$. 则闭环系统(7)在满足时窗丢包率约束(10)和平均驻留时间约束(11)的条件下鲁棒渐近稳定且具有式(12)所示的鲁棒加权 H_∞ 性能指标 $\bar{\gamma}$.

证明 为闭环系统(7)选取二次型准 Lyapunov 函数 $V(k, \xi(k)) = \xi^T(k) P_{\sigma(k)} \xi(k)$, 当 $\sigma(k) = i$ 时, 有 $V_i(\xi(k+1)) - \lambda_i V_i(\xi(k)) + z^T(k) z(k) - \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k) = \zeta^T(k) \hat{\Xi} \zeta(k)$.

其中 $\zeta(k) = [\xi^T(k) \ \omega^T(k)]^T$,

$$\hat{\Xi} = \begin{bmatrix} -\lambda_i P_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{cl,i} & \hat{\Gamma}_\omega \\ \hat{\Psi}_i & \hat{D}_\omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{cl,i} & \hat{\Gamma}_\omega \\ \hat{\Psi}_i & \hat{D}_\omega \end{bmatrix}.$$

由 Schur 补引理, $\hat{\Xi} < \mathbf{0}$ 等价于

$$\hat{\Pi}_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i P_i & * & * & * \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 I & * & * \\ \hat{\Phi}_{cl,i} & \hat{\Gamma}_\omega & -P_i^{-1} & * \\ \hat{\Psi}_i & \hat{D}_\omega & \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{28}$$

经整理, 有

$$\hat{\Pi}_i = \Pi_i + M \Delta N_i + N_i^T \Delta^T M^T.$$

其中: $M = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \bar{E}_1^T \ \bar{E}_2^T], N_i = [\bar{F}_{1,i} \ \bar{F}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]$,

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i P_i & * & * & * \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 I & * & * \\ \Phi_i + \Gamma K_i H_i & \Gamma_\omega & -P_i^{-1} & * \\ \Psi_i & D_\omega & \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

根据引理 1, 式(28)对所有 $\Delta^T \Delta \leq I$ 成立, 当且仅当存在 $\varepsilon_i > 0$, 满足如下不等式

$$\Pi_i + \varepsilon M_i M_i^T + \varepsilon^{-1} N_i^T N_i < \mathbf{0}.$$

依 Schur 补引理, 上式等价于式(26).

综上推导, 由不等式(26)可得 $V_i(\xi(k+1)) - \lambda_i V_i(\xi(k)) + z^T(k) z(k) - \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k) < 0$; 另

外, 由不等式(27)可得 $V_i(\xi(k)) \leq \mu V_j(\xi(k))$. 由定理 1 可知定理 2 结论成立. 证毕.

定理 2 中的不等式(26)同时包含矩阵变量 P_i 和 P_i^{-1} , 因此无法采用 LMI 工具直接求解. 基于锥补线性化算法^[12], 定理 2 矩阵不等式组的可解性问题可归结为如下具有 LMI 约束的非线性目标函数最小化问题:

$$\min \operatorname{tr}(\sum_{i \in \Omega} P_i Q_i).$$

s. t. 式(27), 式(29).

其中, 约束条件(29)由下式给出:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i P_i & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 I & * & * & * \\ \Phi_i + \Gamma K_i H_i & \Gamma_\omega & -Q_i + \varepsilon_i \bar{E}_1 \bar{E}_1^T & * & * \\ \Psi_i & D_\omega & \varepsilon_i \bar{E}_2 \bar{E}_1^T & -I + \varepsilon_i \bar{E}_2 \bar{E}_2^T & * \\ \bar{F}_{1,i} & \bar{F}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{29a}$$

$$\begin{bmatrix} P_i & I \\ I & Q_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \tag{29b}$$

上述问题可通过如下迭代算法求解:

算法 1

步骤 1 求取 LMI(27) 和 (29) 的一组可行解 $\{(P_i, Q_i, K_i, \varepsilon_i) | i \in \Omega\}$. 初始化迭代次数 $k = 0$, 令 $(P_i^k, Q_i^k, K_i^k, \varepsilon_i^k) = (P_i, Q_i, K_i, \varepsilon_i), \forall i \in \Omega$;

步骤 2 求取如下线性目标函数最小化问题的解 $\{(P_i, Q_i, K_i, \varepsilon_i) | i \in \Omega\}$:

$$\min \operatorname{tr}(\sum_{i \in \Omega} P_i^k Q_i + P_i Q_i^k).$$

s. t. 式(27), 式(29).

步骤 3 若 $\{(P_i, Q_i, K_i, \varepsilon_i) | i \in \Omega\}$ 满足式(26), 则求解成功; 若 $\{(P_i, Q_i, K_i, \varepsilon_i) | i \in \Omega\}$ 不满足式(26)且迭代次数超出预设上限 k_{\max} , 则求解失败; 否则, 令 $k = k + 1, (P_i^k, Q_i^k, K_i^k, \varepsilon_i^k) = (P_i, Q_i, K_i, \varepsilon_i), \forall i \in \Omega$, 返回步骤 2.

3 仿真实验

式(1)所示仿真对象的系统参数取值如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 & 1.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, B_\omega = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, D_\omega = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

被控对象系统矩阵特征值为 1.063 9 和 -0.563 9,有一特征值位于单位圆外,系统开环不稳定.为验证本文所提控制方法的优越性,首先考虑仅采用 $\tilde{y}(k)$ 的静态输出反馈切换控制律 $u(k) = \bar{K}_{\sigma(k)} \tilde{y}(k)$. 对应于式(6)控制律,有 $K_i = [\bar{K}_i \ 0 \ 0 \ 0]$, $\forall i \in \Omega$. 给定设计参数 $\lambda_- = 0.55, \lambda_-^* = 0.82, \lambda_+ = 1.80, \gamma = 3, T = 3$, 设置迭

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.569\ 6 & -0.119\ 0 & -0.069\ 9 & -0.477\ 3 \\ -0.237\ 3 & 0.034\ 0 & -0.048\ 0 & -0.123\ 2 \end{bmatrix},$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.032\ 5 & -0.484\ 6 & -0.025\ 6 \\ 0 & 0 & -0.017\ 1 & -0.211\ 5 & 0.004\ 9 \end{bmatrix}, K_2 = K_4 = 0.$$

以上对比设计结果表明,式(6)控制律通过合理增广控制输入,增加了控制器设计的自由度,提升了定理 2 中矩阵不等式条件的可解性,从而降低了控制器设计的保守性.

经计算,系统时窗丢包率上限和平均驻留时间下限分别为 $r^*(T) = 0.168\ 4$ 和 $\tau_a^* = 19.920\ 1$. 鲁棒加权 H_∞ 性能指标为 $\bar{\gamma} = 61.262\ 2$.

通过时域仿真对以上计算结果进行验证. 仿真算例中,仿真时长为 400 个采样周期,时窗丢包率 $r(3) = 0.166\ 7$,平均驻留时间 $\tau_a = 20$,扰动输入 $\omega(k)$ 为服从 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量,系统不确定矩阵满足 $\Delta(k) = \text{diag}\{\sin(k\pi/2), \cos(k\pi/2)\}$. 仿真运行 10 次所得的加权 H_∞ 性能最大值为 9.119 9,小于计算得到的理论上限,从而验证了定理 1 设计方法的有效性.

4 结 论

1) 将具有双通道短时延和丢包的 NCS 建模为切换系统,进而基于平均驻留时间方法进行系统性能分析与控制综合,能够很好地适应 NCS 被控对象开环不稳的情况,实现闭环鲁棒 H_∞ 控制.

2) 通过采用基于增广系统输出向量的静态输出反馈控制形式,增加了控制器设计的自由度,能够有效地降低控制器设计的保守性.

参考文献:

[1] Hespanha J P, Naghshabrizi P, Xu Y. A survey of recent results in networked control systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 138 – 162.

[2] 游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述[J]. *自动化学报*, 2013, 39(2): 101 – 118.

(You Ke-you, Xie Li-hua. Survey of recent progress in networked control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*,

代次数上限 $k_{\max} = 20$, 基于 Matlab 的 YALMIP 工具箱实现算法 1. 结果求解器未能在限定的迭代次数内得到 \bar{K}_i 的可行解.

考虑式(6)所示的基于 $\eta(k)$ 的静态输出反馈切换控制律,在给定设计参数、迭代次数上限以及运行环境均保持不变的条件下执行算法 1,解得控制器增益为

2013, 39(2): 101 – 118.)

[3] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59 – 70.

[4] Lin H, Antsaklis P J. Stability and stabilizability of switched linear systems; a survey of recent results [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 308 – 322.

[5] Yu J, Wang L, Yu M. Switched system approach to stabilization of networked control systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(17): 1925 – 1946.

[6] Wang R, Liu G P, Wang W, et al. H_∞ control for networked predictive control systems based on the switched Lyapunov function method [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, 57(10): 3565 – 3571.

[7] Zhang W A, Yu L. Output feedback stabilization of networked control systems with packet dropouts [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1705 – 1710.

[8] Sun Y, Qin S. Stability of networked control systems with packet dropout; an average dwell time approach [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(1): 47 – 53.

[9] Ploplys N J, Kawka P A, Alleyne A G. Closed-loop control over wireless networks—developing a novel timing scheme for real-time control systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24(3): 58 – 71.

[10] Daafouz J, Riedinger P, Jung C. Stability analysis and control synthesis for switched systems; a switched Lyapunov function approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1883 – 1887.

[11] Hespanha J P, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time [C]//Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, 1999: 2655 – 2660.

[12] Ghaoui L E, Oustry F, Aitrami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 – 1176.