

一种新的宏观交通流模型

邵新慧, 韩颖, 胡云逸

(东北大学理学院, 辽宁沈阳 110819)

摘要: 为了更好地进行城市交通规划与控制, 亟待发展一种有效描述交通流动的数学模型. 基于交通流研究中通常采用的微观-宏观参量间的联系方法, 得到了一种新的动力学模型. 它以线性加权的方式考虑了车辆相对速度的影响, 使得新模型更加符合实际的交通情况. 新模型考虑了车辆间相对距离对后车加速度的影响, 一些经典的连续交通流模型可以视为新模型的特例, 如 Payne 模型、Wiltham 模型和 Zhang 模型. 此外, 研究了新模型的特征速度和线性稳定性, 发现新模型恒稳定, 且模型是否具有各向异性由各向异性因子决定.

关键词: 跟驰模型; 宏观交通流模型; Payne 模型; Wiltham 模型; Zhang 模型; 线性稳定

中图分类号: TB 126

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2014)07-1055-05

An Improved Traffic Flow Model

SHAO Xin-hui, HAN Ying, HU Yun-yi

(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: SHAO Xin-hui, E-mail: xinhui1002@126.com)

Abstract: To better carry out the planning and control of urban transport, a more effective mathematical model describing traffic flow was given. The new model is based on both the driver's car-following behavior and general linkage between microscopic and macroscopic parameters. Since the model includes the effects of both the relative speeds and the relative distance with linear weighted method, it is more realistic. Meanwhile, some well-know continuum models are contained in this new model as special cases, such as Payne model, Wiltham model, and Zhang model. The characteristic velocity and linear stability of the new model were studied. The new model is inherently stable and controls the extent of non-anisotropic and diffusive influences through a dimensionless parameter called anisotropic factor.

Key words: car-following model; macroscopic traffic flow model; Payne model; Wiltham model; Zhang model; linear stability

交通流理论是描述所研究问题中交通车辆的运动规律, 目的是为了阐述交通现象形成的机理, 为城市道路与公路的规划设计和营运管理提供理论指导. 早期的交通流模型研究主要是建立在概率论的基础之上^[1], 二战之后经济复苏, 随着汽车的逐渐普及, 道路交通流量急速增加. 此时, 车辆的独立性越来越小, 交通现象的随机性也随之变弱, 使得原来的概率论方法已不能适用, 推动了交通流理论的迅速发展, 相继出现了车辆跟驰理论、流体动力学理论和车辆排队理论^[2]. 20 世纪 70 年代中期, 计算机科学的迅速发展为交通流理

论的研究揭开了崭新的一幕, 交通流理论逐渐由纯理论转向应用研究. 以车辆跟驰思想为立足点的交通流动力学模型开始崭露头角. 进入 20 世纪 90 年代, 一些新思路、新方法和新策略不断涌现, 交通流模型的研究呈现出百家争鸣的局面^[3-10].

目前, 按照对交通流细节描述的不同, 一般把交通流模型分为三大类: 基于自驱动理论的微观模型、基于空气动力学的中观模型和基于流体力学的宏观模型. 宏观模型可以分为运动学模型、动力学模型和动力论模型, 本文的论述重点是对宏观模型进行研究及创新.

1 新模型的建立

1.1 基于 Newell^[8] 车辆跟驰模型得到交通流加速度公式

将驾驶员需要根据前后车的相对距离来调整车辆速度作为基本假设,且假定驾驶员存在反应延迟,建立如下的车辆跟驰模型:

$$\begin{aligned} v_n(t+T) &= V(x_{n-1}(t) - x_n(t)) \\ &= V(S_n(t)). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: T 为车辆速度调整的延迟时间,通常认为 T 为常数; $S_n(t) = x_{n-1}(t) - x_n(t)$ 表示 t 时刻第 $n-1$ 辆车(前车)和第 n 辆车(后车)的相对距离; $v_n(t)$ 表示 t 时刻第 n 辆车的速度; V 是关于 $S_n(t)$ 的函数.根据微观-宏观关系,令 $v_n(t) \rightarrow v(x_n, t)$, $S_n(t) \rightarrow S(x_n, t)$,式(1)可以改写为 $v(x_n, t+T) = V(S(x_n, t))$.根据交通流密度的定义可知,交通流密度 ρ 和前后车相对距离 Δ 的关系为 $\rho(x_n + \delta, t) = \frac{1}{x_{n-1}(t) - x_n(t)}$,其中 $0 < \delta < \Delta$, $\Delta = x_{n-1} - x_n$,上式可改写成 $v(x_n, t+T) = V(\rho^{-1}(x_n + \delta, t)) = V_*(\rho(x_n + \delta, t))$.令 $x_n \rightarrow x$,则基于距离差的车辆跟驰模型方程变为 $v(x, t+T) = V(\rho^{-1}(x + \delta, t)) = V_*(\rho(x + \delta, t))$.对上式左右两边进行 Taylor 展开,并忽略高阶项和自变量 x 和 t ,上式可简化为

$$\begin{aligned} v + T \frac{dv}{dt} &= V_*(\rho) + \delta \frac{dV_*(\rho)}{dx} = \\ &= V_*(\rho) + \delta V_*'(\rho) \rho_x. \end{aligned} \quad (2)$$

且交通流加速度可表示为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V_*(\rho) - v}{T} + \frac{\delta}{T} V_*'(\rho) \rho_x. \quad (3)$$

1.2 由基于速度差的车辆跟驰模型得到交通流加速度公式

基于速度差的车辆跟驰模型方程为

$$T \frac{dv_n(t)}{dt} = v_{n-1}(t) - v_n(t). \quad (4)$$

T 表示车辆速度调整的延迟时间; $v_{n-1}(t)$ 和 $v_n(t)$ 表示 t 时刻第 $n-1$ 辆车和第 n 辆车的速度.根据微观-宏观关系,令 $v_n(t) \rightarrow v(x_n, t)$,由拉格朗日中值定理得 $v(x_{n-1}, t) - v(x_n, t) = \Delta v_x(x_n + \tilde{\delta}, t)$,其中 $0 < \tilde{\delta} < \Delta$.令 $x_n \rightarrow x$,式(4)整理为 $\frac{dv(x, t)}{dt} = \frac{\Delta}{T} v_x(x + \tilde{\delta}, t)$.对式(4)右边进行 Taylor 展开,并忽略高阶项和自变量 x, t ,交通流加速度可简化为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta}{T} v_x + \frac{\Delta}{T} \tilde{\delta} v_{xx}. \quad (5)$$

1.3 同时考虑距离差与速度差的新模型

实际中驾驶员不仅要依靠前后车的相对距离来调节车辆加速度,还要同时考虑前后车的相对速度、惯性等多种因素的影响.所以,在一个更加符合实际的模型中,在考虑交通流加速度的条件下,应以线性加权的方式考虑车辆相对速度和相对距离的影响.得到新模型的动力学方程为

$$\begin{aligned} v_t + v v_x &= \frac{dv}{dt} = \alpha \frac{V_*(\rho) - v}{T} + \alpha \frac{\delta}{T} V_*'(\rho) \rho_x + \\ &= \beta \frac{\Delta}{T} v_x + \beta \frac{\Delta}{T} \tilde{\delta} v_{xx}. \end{aligned} \quad (6)$$

其中 α 和 β 为待定线性加权参数,即 $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ 且 $\alpha + \beta = 1$.

为使模型完整,需要确定式(6)中的参数 $T, \delta, \tilde{\delta}, \Delta$.首先,令 $\delta = \tilde{\delta}$,并认为 $\delta \approx \frac{\Delta}{2}$, $\frac{\delta}{T}$ 表示小扰动传播速度, $\frac{\delta}{T} = -c(\rho) \geq 0$.对于平衡交通流,也就是说 $v \approx V_*(\rho)$, $c(\rho) = f_*'(\rho) - V_*(\rho) = \rho V_*'(\rho)$.假设在平衡交通流和非平衡交通流中,扰动传播速度保持同一量级,通过分析可得非平衡交通流中小扰动速度 $\frac{\delta}{T} = -c(\rho) = -\rho V_*'(\rho)$.从而式(6)写成 $v_t + (v + 2\beta c(\rho)) v_x = \alpha \frac{V_*(\rho) - v}{T} - \alpha \frac{c^2(\rho)}{\rho} \rho_x + 2\beta T c^2(\rho) v_{xx}$.于是完整的交通流新模型可写成如下形式:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ v_t + (v + 2\beta c(\rho)) v_x &= \alpha \frac{V_*(\rho) - v}{T} - \alpha \frac{c^2(\rho)}{\rho} \rho_x + 2\beta T c^2(\rho) v_{xx}. \end{aligned} \quad (7)$$

值得注意的是,当 $\alpha = 1, \beta = 0$,式(7)退化为 Payne 模型、Wiltham 模型和 Zhang 模型;当 $\alpha = 0, \beta = 1$,式(7)与 Zhang^[8]模型相似;若 $c(\rho) = c_0$ 为常数,式(7)与 Kuhne 模型相似,因此一些经典的连续交通流模型可以视为新模型的特例.

2 新模型的定性分析

2.1 特征速度和车辆倒退现象分析

式(7)是一个双曲型方程组.为了便于分析,将方程组写为如下矩阵形式:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{E}. \quad (8)$$

$$\text{其中, } U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{\alpha c^2(\rho)}{\rho} & v + 2\beta c(\rho) \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha(V_*(\rho) - v)}{T} + 2\beta T c^2(\rho) v_{xx} \end{pmatrix}.$$

其相应的齐次线性方程组为

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{\alpha c^2(\rho)}{\rho} & v + 2\beta c(\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

可求解 A 矩阵的特征值 λ 为

$$\lambda_{1,2} = v + \beta c(\rho) \pm c(\rho) \sqrt{\beta^2 + \alpha} \quad (\lambda_1 < \lambda_2), \quad (10)$$

其对应特征速度为

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = v + \beta c(\rho) + c(\rho) \sqrt{\beta^2 + \alpha} \leq v,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = v + \beta c(\rho) - c(\rho) \sqrt{\beta^2 + \alpha} > v.$$

相应的右特征向量为

$$r_1(\rho, v) = (1, (\beta + \sqrt{\alpha + \beta^2}) V'_*(\rho))^T,$$

$$r_2(\rho, v) = (1, (\beta - \sqrt{\alpha + \beta^2}) V'_*(\rho))^T.$$

而且相应于如下两个有特征向量的特征场是非线性的, $f_*(\rho) = \rho V_*(\rho)$, $\nabla \lambda_{1,2}$ 表示 $\lambda_{1,2}$ 在点 (ρ, v) 的梯度, 方程组(9)的黎曼问题的解为冲击波和稀疏波.

$$\nabla \lambda_1(\rho, v) r_1(\rho, v) = (\beta + \sqrt{\alpha + \beta^2}) f''_*(\rho) < 0,$$

$$\nabla \lambda_2(\rho, v) r_2(\rho, v) = (\beta - \sqrt{\alpha + \beta^2}) f''_*(\rho) > 0.$$

齐次方程组(9)有两族交通流扰动波: 激波和稀疏波, 每一个特征场为一族. 由于 $\lambda_1 \leq v$ 和 $\nabla \lambda_1(\rho, v) r_1(\rho, v) < 0$, 所以在第一个特征场中的扰动波与 LWR 模型中的性质相同. 实际上, 如果 $\beta = 0$, 它们在数量上也相同. 然而, 在第二个特征场中的扰动波, 与在第一个特征场中有明显不同. 由于 $\lambda_2 > v$ 和 $\nabla \lambda_2(\rho, v) r_2(\rho, v) > 0$, 所以第二特征场中的小扰动传播速度大于车流的宏观速度, 这意味着车辆将受后面车辆的影响, 与车流各向异性特性相悖. 但是, 这种现象在新模型中可以通过调节 α, β 之间的关系来进行控制. 因 $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ 且 $\alpha + \beta = 1$, 可以通过 β 的取值来控制, 将 β 称为各向异性因子. 在实际中, α, β 之间的关系与交通状况有关.

非齐次方程组(7)与其对应的齐次方程组(9)性质相同. 黏性项的引入使激波变得平滑, 而松弛项的引入使得车流迅速地趋于平衡状态. 所以, 多数情况下, 式(7)与以下的黏滞性平衡模型更加相似, $\rho_t + f_*(\rho)_x = T(v(\rho)\rho_x)_x$. 当松弛时间

T 趋于零时, 式(7)中行波将趋于式(9)中激波, 也不会出现车辆倒退现象. 违背各向异性的一个典型的后果就是车辆倒退现象.

综上所述, 在宏观模型中, 与交通状况相关的参数 α, β 的关系可以用来判断一些特殊情况下是否会出现车辆倒退现象.

2.2 新模型的线性稳定性

假设方程组(7)的稳态解是 ρ_0 和 $v_0 = V_*(\rho_0)$. 为了研究方程组(7)的扰动波, 需引入稳态解 (ρ_0, v_0) 上的小扰动 $u = \frac{v - v_0}{c_0}, r = \ln \frac{\rho}{\rho_0}$, 其中, $c_0 = c(\rho)$. 则方程组的扰动解为

$$\rho \approx \rho_0(1 + r), v = v_0 + c_0 u. \quad (11)$$

将式(11)代入到方程组(7)中, 并忽略小扰动的高阶项, 得

$$r_t + v_0 r_x + c_0 u_x = 0,$$

$$u_t + (v_0 + 2\beta c_0) u_x + \alpha c_0 r_x = \frac{\alpha(r - u)}{T} + 2\beta T c_0^2 u_{xx}.$$

通过引入新的坐标系 $\tilde{t} = \frac{t}{T}, \tilde{x} = \frac{x - v_0 t}{c_0 T}$, 上式可写为

$$r_t + u_x = 0, u_t + 2\beta u_x + \alpha r_x = \alpha(r - u) + 2\beta u_{xx}. \quad (12)$$

忽略 \sim , 并对式(12)第二个式子两边对 x 求导, 得 $u_{xt} + 2\beta u_{xx} + \alpha r_{xx} = \alpha(r_x - u_x) + 2\beta u_{xxx}$. 再由式(12)得 $u_x = -r_t, u_x = -r_t$ 两边分别对 x, t 求导, 得 u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx} , 于是有

$$\left(\omega - \beta k + i \frac{\alpha + 2\beta k^2}{2}\right)^2 = \left(\beta k - i \frac{\alpha + 2\beta k^2}{2}\right)^2 + \alpha k(k + i). \quad (13)$$

则 ω 的二次方程的解为

$$\omega = \beta k - i \frac{\alpha + 2\beta k^2}{2} \pm \sqrt{\left(\beta k - i \frac{\alpha + 2\beta k^2}{2}\right)^2 + \alpha k(k + i)}. \quad (14)$$

显然, 模型的线性稳定性是由关于 ω 的二次方程的根的虚部 $\text{Im}(\omega)$ 决定. 如果有一个根的虚部大于零, 则模型是不稳定的; 只有当两个根的虚部均小于等于零时, 模型才是线性稳定的. 从而, 模型的线性稳定性由参数 α, β 决定, 因为 $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ 且 $\alpha + \beta = 1$, 也就是说可以通过 β 的取值来控制. 一般情况下, 可以用以下方法判断模型的稳定性. 图 1 表示当 $\beta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ 时, $\text{Im}(\omega)$ 随 k 的变化.

在新模型中, 车流的各向异性由 α, β 之间的关系决定. 当 $\beta \gg \sqrt{\alpha}$ 时, 扰动传播速度将与车流宏观速度几乎相同, 车辆将几乎不会受后方车辆的影响. 从数值模拟的结果可以看出, 对于任意的

$0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ 且 $\alpha + \beta = 1$, 都有 $\text{Im}(\omega) \leq 0$, 这意味着新模型是线性稳定的.

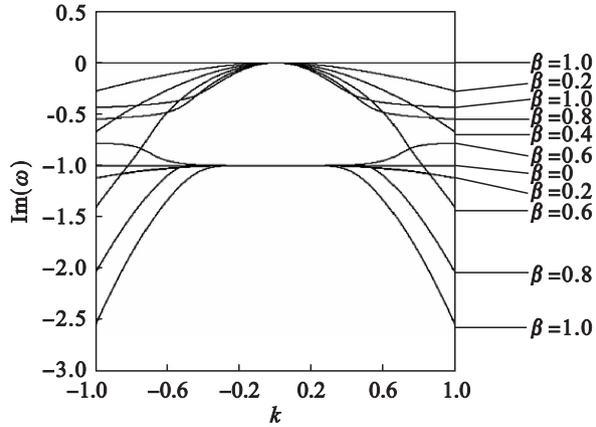


图 1 $\text{Im}(\omega)$ 随 k 的变化图像
Fig. 1 $\text{Im}(\omega) - k$ curves

3 数值算例

模拟路段长 200 km, 等距分成 100 个网格, 时间步长按稳定性条件确定, 根据相关实测和参数辨识, 取 $v_f = 30 \text{ m/s}$, $\rho_m = 0.2 \text{ 辆/m}$, $T = 7 \text{ s}$, $c_m = 6 \text{ m/s}$, 平衡速度 $v_e(\rho)$ 采用关系式为

$$v_e(\rho) = v_f [1 - \exp(1 - \exp(\frac{c_m}{v_f} (\frac{\rho_m}{\rho} - 1)))]$$

其中: c_m 为堵塞的扰动传播速度; v_f 为自由流速度; ρ_m 为堵塞密度. Riemann 初值条件为: $\rho_u = 0.18$, $\rho_d = 0.04$, 其中 ρ_u, ρ_d 分别为上、下游车流密度. 初值速度取 $v_u(\rho) = v_e(\rho_u)$, $v_d(\rho) = v_e(\rho_d)$. 密度采用 Payne 给出的离散化公式, 速度采用迎风格式, 计算得到速度 - 距离图像见图 2 (每条线代表不同时间), 本模型模拟出的 $t = 30 \text{ s}$ 时的密度 - 距离图像见图 3. 采用文献[8]中的交通流模型模拟出的速度 - 距离图像见图 4; $t = 30 \text{ s}$ 时文献[8]中的密度 - 距离图像见图 5.

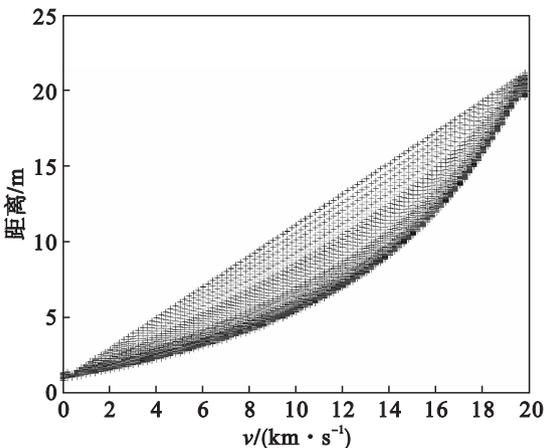


图 2 本文模型的速度 - 距离图像
Fig. 2 Speed-distance curves of the new model

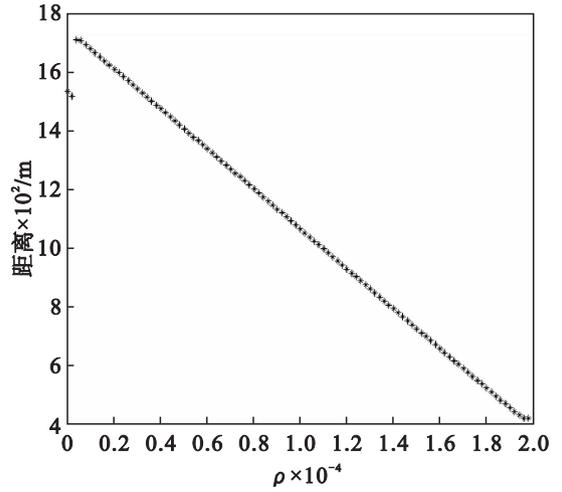


图 3 本文模型的密度 - 距离图像
Fig. 3 Density-distance curves of the new model

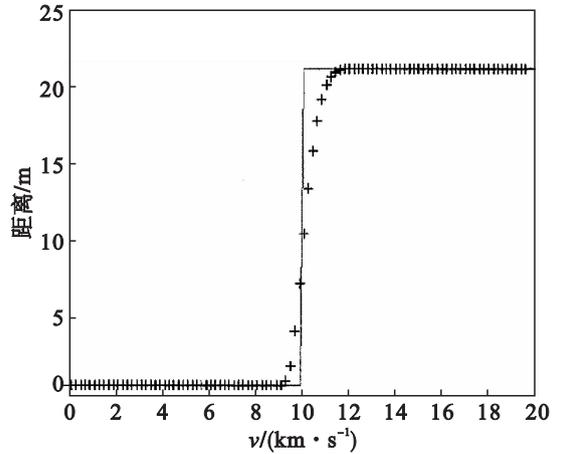


图 4 文献[8]中模型的速度 - 距离图像
Fig. 4 Speed-distance curves in reference[8]

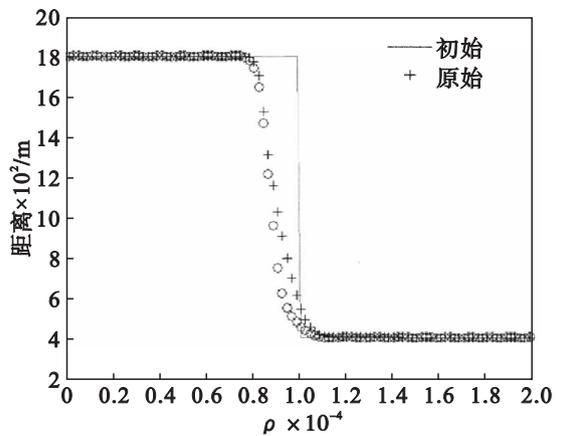


图 5 文献[8]中模型的密度 - 距离图像
Fig. 5 Density-distance curves in reference[8]

数值算例可以很清楚地看到, 本文给出的模型具有很好的连续性与灵活性, 可以根据 α, β 的不同取值确定不同情况下的交通流模型.