

# 基于状态反馈和 Washout 滤波器的 Qi 系统 Hopf 分岔控制

张中华<sup>1</sup>, 袁惠群<sup>2</sup>

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 针对一类 Qi 系统的 Hopf 分岔问题, 首先, 通过计算分岔稳定性指标判定系统的 Hopf 分岔类型; 然后分别采用状态反馈控制器及 Washout 滤波器控制系统的分岔行为, 并采用 Normal Form(规范型)方法讨论控制参数对分岔位置及分岔极限环幅值的影响, 同时借助 Matlab 软件对理论结果进行数值仿真. 理论结果和数值仿真表明: 控制器中的线性增益能提前、延迟甚至消除原系统 Hopf 分岔行为, 控制器中的非线性增益能改变原系统的 Hopf 分岔类型. 最后对两种控制方法进行对比, 结果表明, Washout 滤波器相对于含线性项和非线性项的状态反馈控制器而言, 控制效果较明显.

**关 键 词:** Qi 系统; Hopf 分岔; 分岔控制; Washout 滤波器; 规范型方法

**中图分类号:** O 175.13      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2014)07-1059-06

## Hopf Bifurcation Control of the Qi System Based on State Feedback and Washout-Filter

ZHANG Zhong-hua<sup>1</sup>, YUAN Hui-qun<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: ZHANG Zhong-hua, E-mail: zhangzhonghua1979@126.com)

**Abstract:** To control the Hopf bifurcation of a Qi system, the Hopf bifurcation type was firstly determined by bifurcation stability index. Then, the state feedback controller and Washout filter-aided feedback controller were designed to control the Hopf bifurcation, respectively. The effects of controller parameters on the bifurcation position and the amplitude of limit cycle were discussed based on the Normal Form method. Simultaneously, the simulations using Matlab software were carried out to illustrate the results. Simulation charts and theoretical results show that the linear gain can change the position of Hopf bifurcation and even eliminate Hopf bifurcation, while the nonlinear gain can change the bifurcation type of original system. Finally, some conclusions were obtained with a comparison between the state feedback controller and the Washout filter-aided ones. The results showed that the control effect based on Washout filter is better than the effect based on nonlinear state feedback controller.

**Key words:** Qi system; Hopf bifurcation; bifurcation control; Washout-filter; Normal Form method

非线性动力系统分岔控制具有重要的理论研究和实际应用价值, 被广泛应用于化工、机械电子、电力系统及生物种群等方面<sup>[1-2]</sup>. 分岔控制的主要任务是设计控制律, 改变非线性系统的分岔

特性, 获得所需要的动力学行为, 如通过改变控制器的线性部分提前、延迟或消除 Hopf 分岔的发生, 通过改变控制器的非线性部分控制分岔产生的周期解振幅大小等<sup>[3-6]</sup>. 文献[7]采用自适应

方法研究了一个四维 Qi 系统的混沌同步问题. 文献[8]采用线性与非线性状态反馈, 实现了对四维 Qi 系统零平衡点的 Hopf 分岔反控制. 文献[9]通过非线性状态反馈研究了一个四维 Qi 系统的极限环幅值控制问题. 文献[10]分析了一个三维四翼 Qi 混沌系统解的稳定性问题, 并采用 Washout 滤波器控制系统在零平衡点的分岔行为, 但只讨论了控制器的线性部分对分岔行为的影响, 并且对具体的分岔类型没有进行理论推导. 本文在文献[10]的基础上, 详细研究了该系统的分岔类型, 设计两种不同的分岔控制方法控制系统的分岔行为, 并采用 Normal Form 方法<sup>[4]</sup>讨论了控制参数对分岔位置及分岔极限环幅值的影响. 同时, 借助 Matlab 软件和 Matcont 对理论结果进行数值仿真, 最后对两种控制方法进行对比, 得出一些结论.

## 1 系统分岔分析

考虑三维混沌系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + yz, \\ \dot{y} &= cx + dy - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中,  $a, b, c, d$  为系统参数, 本文只研究系统零平衡点  $O(0,0,0)$  的分岔情况. 为与已有文献[10]结果比较, 选定  $b=43, c=-18, d=14, a$  为分岔参数. 当  $a=a_0=14$  时, 上述系统(1)发生 Hopf 分岔, 如图 1 所示. 系统在平衡点  $O$  的分岔方向为  $a>14$ ; 当  $a<14$  时, 平衡点  $O$  是稳定的.

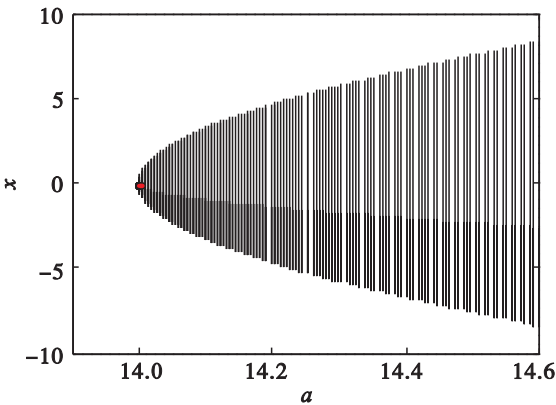


图 1  $a=14$  时, 系统(1) Hopf 分岔图  
Fig. 1 Hopf bifurcation figure of system (1) with  $a=14$

下面判断系统在平衡点  $O$  处的分岔类型. 当取上述参数条件时, 系统(1)在平衡点  $O$  的线性化矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -14 & 14 & 0 \\ -18 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -43 \end{bmatrix}.$$

对应特征方程的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \pm 7.483\,31i, \lambda_3 = -43.$$

令  $X=PU$ , 其中,

$$P = \begin{bmatrix} 0.583\,33 & -0.311\,805 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X = [x, y, z]^T, U = [u_1, u_2, u_3]^T.$$

则系统(1)可化为如下标准型:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= -7.483\,31u_2 + g_1(u_1, u_2, u_3), \\ \dot{u}_2 &= 7.483\,1u_1 + g_2(u_1, u_2, u_3), \\ \dot{u}_3 &= -43u_3 + g_3(u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} g_1(u_1, u_2, u_3) &= 0.415\,74u_2u_3 - 0.777\,77u_1u_3, \\ g_2(u_1, u_2, u_3) &= -3.860\,42u_1u_3 + 0.777\,77u_2u_3, \\ g_3(u_1, u_2, u_3) &= 0.437\,498u_1^2 - 0.233\,85u_1u_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由文献[11]计算式(3)的分岔稳定性指标为

$$\beta = 0.001 > 0.$$

由 Hopf 分岔理论知: 系统发生亚临界 Hopf 分岔, 在平衡点附近出现增幅振荡, 产生不稳定极限环, 如图 2 所示.

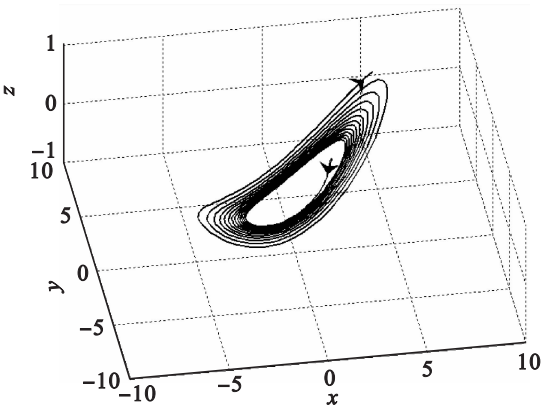


图 2  $a=14$  时, 系统(1) 相图  
Fig. 2 Phase chart of system (1) with  $a=14$

## 2 系统分岔控制

### 2.1 线性和非线性反馈控制

取  $b=43, c=-18, d=4$ , 对系统(1)施加线性和非线性反馈控制器得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + yz, \\ \dot{y} &= -18x + 14y - xz + k_1y + k_2y^3, \\ \dot{z} &= -43z + xy. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中,  $k_1, k_2$  分别为线性增益和非线性增益, 控制器没有改变原系统的平衡点  $O(0,0,0)$ .

#### 2.1.1 $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ 时, 分岔控制情况

当  $k_1 \neq 0, k_2 = 0$  时, 系统(2)在平衡点  $O$  的线

性化矩阵对应的特征方程为

$$(\lambda + 43)[\lambda^2 + (a - k_1 - 14)\lambda + a(4 - k_1)] = 0. \quad (5)$$

当满足关系式  $a - k_1 = 14, a(4 - k_1) > 0$  时, 式(5) 有一对共轭纯虚根  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\omega}i$  和一个负根  $\lambda_3 = -43$ , 其中  $\omega = \sqrt{a(4 - k_1)}$ . 此时, 系统(4) 在平衡点  $O$  产生 Hopf 分岔. 当  $0 < k_1 < 4$  时, 可使系统(1) Hopf 分岔延迟, 如取  $k_1 = 1$ , 则系统(4) 在  $a = 15 > a_0$  处发生 Hopf 分岔, 如图 3a 所示; 当  $k_1 < 0$  时, 可使系统(1) Hopf 分岔提前, 如取  $k_1 = -1$ , 则系统(4) 在  $a = 13 < a_0$  处发生 Hopf 分岔, 如图 3b 所示. 当  $k_1 = 0$  时, 为系统(1) 的情况, 此时, 系统(1) 发生 Hopf 分岔; 当  $a = 14$  时, 若  $k_1 > 0$ , 则系统(4) 产生混沌, 如图 4a 所示; 当  $a = 14$  时, 若  $k_1 < 0$ , 则可使原系统 Hopf 分岔行为消失, 如图 4b 所示.

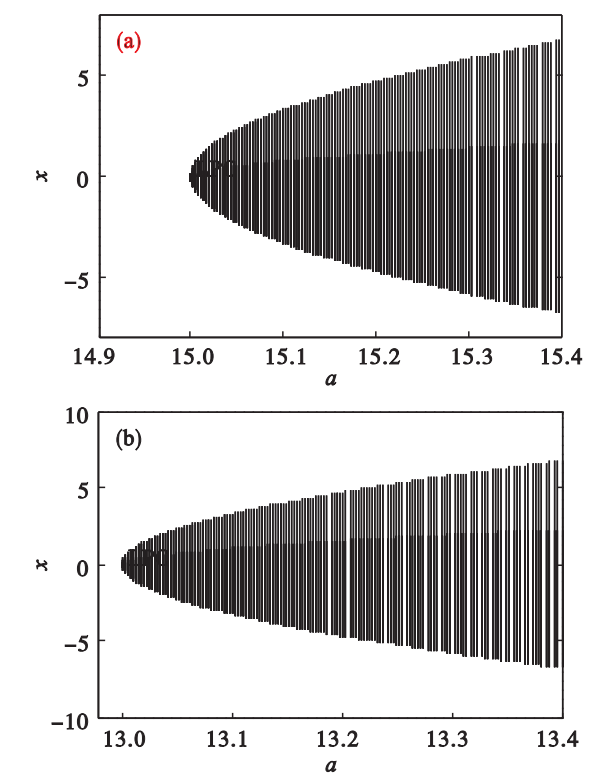


图 3 不同参数条件下系统(4) Hopf 分岔图  
Fig. 3 Hopf bifurcation chart of system(4) under different parameters  
(a)— $k_1 = 1, a = 15$ ; (b)— $k_1 = -1, a = 13$ .

2.1.2  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$  时, 分岔控制情况

不妨取  $k = 1$ , 由上面的讨论得出, 当  $a = 15$  时, 系统(4) 发生 Hopf 分岔, 即原系统(1) 的 Hopf 分岔被延迟. 另外, 由式(5) 计算得, 特征根  $\lambda_{1,2}(a)$  对  $a$  的导数在  $k = 1, a = 15$  时的实部为  $\alpha'(0) = \text{Re}(\lambda'(\alpha))|_{k=1, a=15} = 0.5 > 0$ , 稳定系数  $\beta = 0.009 > 0$ , 所以, 系统(4) 的分岔类型为亚临界 Hopf 分岔, 这表明在加入线性控制器后, 原系

统分岔类型没有被改变, 如图 4c 所示.

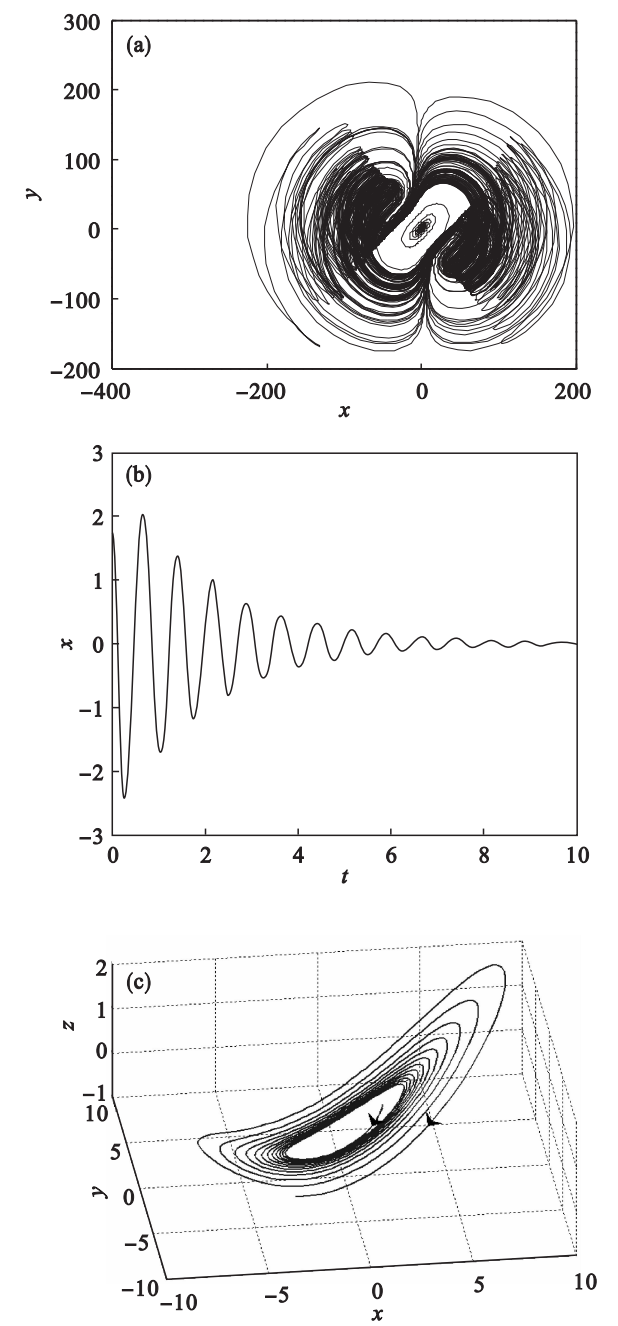


图 4 不同参数条件下系统(4) 轨迹图  
Fig. 4 Trajectory chart of system(4) under different parameters  
(a)— $k_1 = 0.1, a = 14$ ; (b)— $k_1 = -1, a = 14$ ; (c)— $k_1 = 1, a = 15$ .

当  $k = 1, a = 15$  时, 系统(4) 在平衡点  $O$  的线性部分和非线性部分分别为

$$B = \begin{bmatrix} -15 & 15 & 0 \\ -18 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -43 \end{bmatrix}, f(X) = \begin{bmatrix} yz \\ -xz + k_2 y^3 \\ xy \end{bmatrix}.$$

矩阵  $B$  有一对纯虚特征根  $\lambda_{1,2} = \pm 6.708 2i$ , 设对应特征向量为  $\varphi, \bar{\varphi}$ , 其中,

$$\varphi=\begin{bmatrix}0.615\ 5-0.275\ 2\mathrm{i}\\0.738\ 5\\0\end{bmatrix}.$$

根据文献[4]中提出的计算规范型的直接方法,引入变换:

$$X=\varphi v+\overline{\varphi}\overline{v}+\sum_{j+k\geq 2}H_{jk}v^j\overline{v}^k, \tag{6}$$

即可求得方程的 Hopf 分岔规范型为

$$\dot{v}=6.750\ 9\mathrm{i}v+Cv^2\overline{v}. \tag{7}$$

其中,  $C=\langle \Psi,F_{21}\rangle$ ,  $\Psi$  满足  $(B^T-6.708\ 2\mathrm{i}I)\times \Psi=0$  及  $\langle \Psi,\varphi\rangle=1$ ,解得

$$\Psi=\begin{bmatrix}0.816\ 7\mathrm{i}\\0.677\ 0-1.514\ 1\mathrm{i}\\0\end{bmatrix}.$$

将非线性变换(6)代入非线性项中整理成关于  $v,\overline{v}$  的多项式形式:

$$f(X)=\sum_{j+k\geq 2}F_{jk}v^j\overline{v}^k. \tag{8}$$

其中,  $F_{21}$  为  $v^2\overline{v}$  对应的系数向量,

$$F_{21}=[F_{21,1}\ F_{21,2}\ F_{21,3}]^T. \tag{9}$$

$$F_{21,1}=\overline{\varphi}_2H_{20,3}+\varphi_2H_{11,3}=0.023\ 7+0.001\mathrm{i},$$

$$F_{21,2}=-(\varphi_1H_{11,3}+\overline{\varphi}_1H_{20,3})+3k_2\varphi_2^2=0.019\ 4+1.208\ 3k_2-0.002\mathrm{i},$$

$$F_{21,3}=0.$$

上式中,  $H_{jk,m}$  表示向量  $H_{jk}$  中的第  $m$  个元素. 其中

$$H_{11}=-B^{-1}F_{11}=[0\ 0\ 0.021\ 1]^T, \tag{10}$$

$$H_{20}=[2\times 6.708\ 2\mathrm{i}I-B]^{-1}F_{20}=[0\ 0\ 0.011+0.001\ 3\mathrm{i}]^T, \tag{11}$$

$I$  是与  $B$  同阶的矩阵. 其中

$$F_{11}=[0\ 0\ \varphi_1\varphi_2+\overline{\varphi}_1\varphi_2]^T=[0\ 0\ 0.909\ 1]^T, \tag{12}$$

$$F_{20}=[0\ 0\ \varphi_1\varphi_2]^T=[0\ 0\ 0.454\ 5-0.203\ 2\mathrm{i}]^T. \tag{13}$$

由以上各式,计算出

$$C=0.009\ 3+0.818\ 0k_2+(-0.114\ 0-1.829\ 5k_2)\mathrm{i}, \tag{14}$$

所以,受控系统的规范型为

$$\dot{u}=6.750\ 9\mathrm{i}u+[0.009\ 3+0.818\ 0k_2+(-0.114\ 0-1.829\ 5k_2)\mathrm{i}]v^2\overline{v}. \tag{15}$$

极限环的幅值近似解析解为

$$r=\sqrt{-\frac{\alpha'(0)}{0.009\ 3+0.818\ 0k_2}(a-15)}. \tag{16}$$

根据 Hopf 分岔理论知,当  $\operatorname{Re}(C)<0$ ,即  $k_2<-0.022$  时,系统(4)在  $a=15$  处发生超临界 Hopf 分岔,原系统分岔类型被改变,不稳定极限环变为稳定极限环,如图 5 所示. 由  $\alpha'(0)=0.5>0$  及

$\operatorname{Re}(C)<0$  知,Hopf 分岔方向为  $a>15$ ,受控系统的极限环幅控关系如图 6 所示.

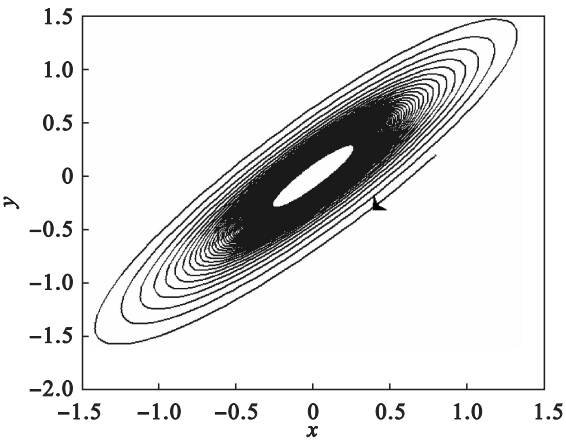


图 5 当  $a=15,k_1=1,k_2=-0.2$  时,系统(4)极限环  
Fig. 5 Limit cycles of system(4) with  $a=15,k_1=1,k_2=-0.2$

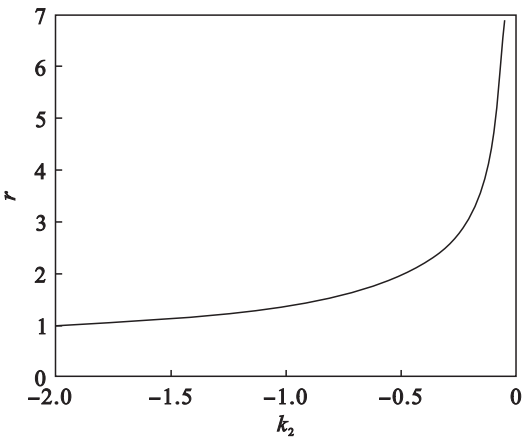


图 6 系统(4)的极限环幅值曲线( $a=18$ )  
Fig. 6 Gain amplitude curve of system(4) with  $a=18$

### 2.2 Washout 滤波器控制

取参数  $b=43,c=-18,d=14$ ,对系统(1)施加基于 Washout 滤波器原理的控制器得

$$\left. \begin{aligned}\dot{x} &= a(y-x)+yz, \\ \dot{y} &= -18x+14y-xz+k_1(y-\xi v)+k_2(y-\xi v)^3, \\ \dot{z} &= -43z+xy, \\ \dot{v} &= y-\xi v.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中,  $\xi$  为滤波器常数,  $k_1,k_2$  分别为线性增益和非线性增益,Washout 滤波器没有改变原系统的平衡点  $O(0,0,0)$ . 经计算得,当  $k_1$  满足不等式  $k_1>0.1,4.1-k_1>0,\Delta\geq 0,f(14)>0$  或者  $k_1>0.1,4.1-k_1>0,\Delta\geq 0$  时,系统(17)在分岔参数  $a>14$  处发生 Hopf 分岔. 其中  $\Delta=(k_1^2+9.8k_1-60.19)^2-4(4.1-k_1)(1.4k_1+19.46)f(a)=(4.1-k_1)a^2+(k_1^2+9.8k_1-60.19)a+1.4k_1+$

19.46, 即当控制器的线性增益满足一定条件时, 可使原系统 Hopf 分岔行为延迟. 如取  $\xi = 0.1$ ,  $k_2 = 0$ , 则当  $k_1 = 1$  时, 系统(17)在  $a = 15 > a_0$  处发生亚临界 Hopf 分岔, 计算得  $\alpha'(0) = -0.4958$ ,  $\beta = 0.0001 > 0$ , 极限环不稳定, 产生增幅振荡, 如图 7a 所示. 此时, 可使原系统 Hopf 分岔行为消失, 如图 7b 所示.

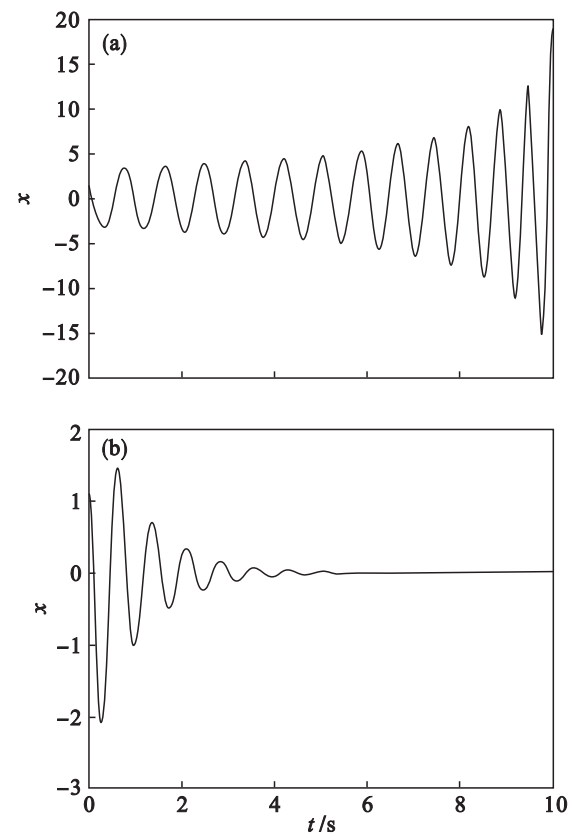


图 7 不同参数条件下系统(17)波形图  
Fig. 7 Waveform of system(17) under different parameters  
(a)— $a = 15, \xi = 0.1, k_2 = 0, k_1 = 1$ ;  
(b)— $a = 14, \xi = 0.1, k_2 = 0, k_1 = -1$ .

当  $k_1 = 1, k_2 \neq 0$  时, 计算得系统(17)的分岔稳定性指标为

$$\beta_1 = 0.0001 + 0.2044k_2, \tag{18}$$

极限环的幅控关系为

$$r = \sqrt{\frac{-\alpha'(0)(a - a_0)}{\beta_1}} = 0.7041 \sqrt{\frac{a - 15}{0.0001 + 0.2044k_2}}.$$

又因为  $\alpha'(0) = -0.4958 < 0$ . 所以, 由 Hopf 分岔理论<sup>[11]</sup> 知: 当  $\beta_1 < 0$ , 即  $k_2 < -0.0004$  时, 系统(17)在  $a = 15$  处发生超临界 Hopf 分岔, 且 Hopf 分岔方向为  $a < 15$ . 这说明当非线性控制参数满足一定条件时, 所施加的控制器可改变系统的 Hopf 分岔类型, 使亚临界 Hopf 分岔变为超临界

Hopf 分岔, 不稳定极限环变为稳定的极限环, 如图 8 所示. 且极限环幅值会随着非线性控制参数的减小而减小, 如图 9 所示.

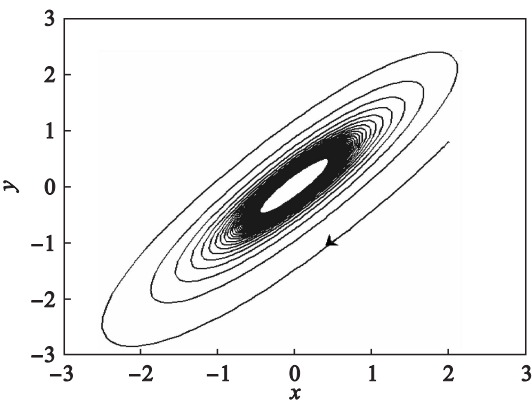


图 8  $\xi = 0.1, k_2 = -0.2, k_1 = 1, a = 15$  系统(17)相图  
Fig. 8 Phase chart of system(17) with  $\xi = 0.1, k_2 = -0.2, k_1 = 1, a = 15$

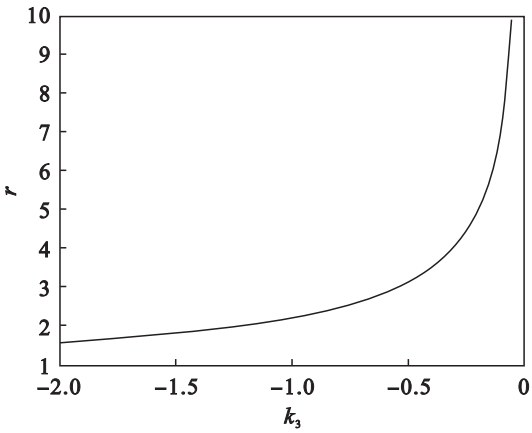


图 9 系统(17)的极限环幅值曲线( $a = 13$ )  
Fig. 9 Gain amplitude curve of system(17) with  $a = 13$

从图 6 和图 9 可看出, 2.2 节中的控制方法同 2.1 节中的控制方法相比, 极限环的幅值随非线性增益变化的速度相对较快. 由图 4b 和图 7b 可知, 与 2.1 节中的控制方法相比, 2.2 节中的控制方法使 Hopf 分岔位置消失的速度较快.

### 3 结 论

本文首先根据分岔稳定性指标判断了系统的 Hopf 分岔类型; 然后设计两种不同的控制器控制系统的亚临界 Hopf 分岔, 分别讨论了两种控制器中控制参数对 Hopf 分岔位置、分岔类型及极限环幅值的影响, 并对两种控制方法进行对比. 结果表明, Washout 滤波器相对于含线性项和非线性项的状态反馈控制器而言, 控制效果较明显.

参考文献:

[ 1 ] Zhao H T,Lin Y P,Dai Y X. Bifurcation analysis and control of chaos for a hybrid ratio-dependent three species food chain [J]. *Applied Mathematics and Computation*,2011,218(5):1533 – 1546.

[ 2 ] Yi N,Liu P,Zhang Q L. Bifurcations analysis and tracking control of an epidemic model with nonlinear incidence rate [J]. *Applied Mathematical Modelling*,2012,36(4):1678 – 1693.

[ 3 ] Lan Y Y,Li Q G. Control of Hopf bifurcation in a simple Plankton population model with a non-integer exponent of closure [ J ]. *Applied Mathematics and Computation*,2008,200(1):220 – 230.

[ 4 ] 吴志强,孙立明. 基于 Washout 滤波器的系统 Hopf 分岔控制[J]. 物理学报,2011,60(5):1 – 5.  
( Wu Zhi-qiang,Sun Li-ming. Hopf bifurcation control of the system based on Washout filter controller[J]. *Acta Physical Sinica*,2011,60(5):1 – 5. )

[ 5 ] Le H N,Hong K S. Hopf bifurcation control via a dynamic state-feedback control[J]. *Physics Letters A*,2012,376(4):442 – 446.

[ 6 ] Cheng Z S. Anti-control of Hopf bifurcation for Chen ’ s

system through Washout filters [ J ]. *Neurocomputing*,2010,73(17):3139 – 3146.

[ 7 ] Sudheer K S,Sabir M. Switched modified function projective synchronization of hyperchaotic Qi system with uncertain parameters [ J ]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*,2010,15(12):4058 – 4064.

[ 8 ] 刘素华,唐驾时. 四维 Qi 系统零平衡点的 Hopf 分岔反控制[J]. 物理学报,2008,57(10):6162 – 6168.  
( Liu Su-hua,Tang Jia-shi. Anti-control of Hopf bifurcation at zero equilibrium of 4D Qi system [ J ]. *Acta Physical Sinica*,2008,57(10):6162 – 6168. )

[ 9 ] 刘素华,赵成刚,唐驾时,等. Qi 系统的 Hopf 分叉分析与幅值控制 [ J ]. 动力学与控制学报,2008,6(2):141 – 145.  
( Liu Su-hua,Zhao Cheng-gang,Tang Jia-shi, *et al.* Hopf bifurcation analysis and amplitude control of limit cycle in the system [ J ]. *Journal of Dynamics and Control*,2008,6(2):141 – 145. )

[ 10 ] Zhang R Y,Sun G L. Hopf bifurcation control of the Qi 3D four wing chaotic system via Washout filter [ C ]//The 2nd International Conference on Intelligent Control and Information Processing. Zhengzhou,2011:177 – 179.

[ 11 ] Hassard B D. Theory and application of Hopf bifurcation [ M ]. New York:Cambridge University,1981.

( 上接第 1058 页 )

4 结 论

本文从微观的车辆跟驰理论出发,对跟驰车辆的行为进行了较为全面的分析,并按照交通流研究中通常采用的微观 – 宏观参量间的联系方法,得到了一种新的动力学模型. 新模型不仅考虑了车辆相对距离对后车加速度的影响,并以线性加权的方式考虑了车辆相对速度的影响,所以新模型更加符合实际的交通情况. 另外发现一些经典的连续交通流模型可以视为新模型的特例,例如 Payne 模型、Wiltham 模型和 Zhang 模型. 新模型具有很好的线性稳定性.

参考文献:

[ 1 ] Payne H J. Models of freeway traffic and control [ J ]. *Mathematical Methods of Public Systems*,1971,1(1):51 – 61.

[ 2 ] Lighthill M J,Whitham G B. On kinematic waves; part I. flow movement in long rivers [ J ]. *Proceedings of the Royal Society of London A*,1995,229(3):281 – 316.

[ 3 ] Lighthill M J,Whitham G B. On kinematic waves; part II. a theory of traffic flow on long crowded road [ J ]. *Proceedings of the Royal Society of London A*,1995,229(3):317 – 345.

[ 4 ] Daganzo C F. Requiem for second-order approximations of traffic flow [ J ]. *Transportation Research B:Methodological*,1995,29(4):277 – 286.

[ 5 ] Zhang H M. A theory of non-equilibrium traffic flow [ J ]. *Transportation Research B: Methodological*,1998,32(7):485 – 498.

[ 6 ] Jiang R,Wu Q S,Zhu Z J. A new continuum model for traffic flow and numerical tests [ J ]. *Transportation Research B:Methodological*,2002,36(5):405 – 419.

[ 7 ] Jiang R,Wu Q S,Zhu Z J. A new dynamic model for traffic flow [ J ]. *Chinese Science Bulletin*,2001,46(4):345 – 349.

[ 8 ] Zhang H M. A non-equilibrium traffic flow model devoid of gas-like behavior [ J ]. *Transportation Research B: Methodological*,2002,36(3):275 – 290.

[ 9 ] 彭光含,孙隼华,何恒攀. 交通流双车跟驰模型与数值仿真 [ J ]. 物理学报,2008,57(12):7541 – 7546.  
( Peng Guang-han,Sun Di-hua,He Heng-pan. The traffic flow of two car following model and numerical simulation [ J ]. *Journal of Physics*,2008,57(12):7541 – 7546. )

[ 10 ] 侯忠生,金尚泰,赵明. 宏观交通流模型参数的迭代学习辨识方法 [ J ]. 自动化学报,2008,34(1):64 – 71.  
( Hou Zhong-sheng,Jin Shang-tai,Zhao Ming. Iterative learning macroscopic traffic flow model parameter identification method [ J ]. *Acta Automatica Sinica*,2008,34(1):64 – 71. )