

# 基于边界移动法的高炉炉缸侵蚀监测模型

李 强<sup>1</sup>, 冯明霞<sup>2</sup>, 储 文<sup>3</sup>, 邹宗树<sup>1</sup>

(1. 东北大学 材料与冶金学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 辽宁科技学院 冶金工程学院, 辽宁 本溪 117004;

3. 宝山钢铁股份有限公司 炼铁厂, 上海 201900)

**摘 要:** 基于预埋在高温炉缸内热电偶反馈的温度数据, 联合数值传热计算和最优化理论的梯度下降法寻找最优化的边界移动步长因子, 建立了高炉炉缸侵蚀监测模型. 应用建立的模型可有效求解未知边界的传热反问题. 将热电偶反馈的监测数据作为输入数据, 应用建立的炉缸侵蚀监测模型对其进行未知边界问题反演求解, 计算得到了炉缸内衬侵蚀形貌和残厚. 把已知炉缸侵蚀形貌和相应的热电偶测温数据的高炉炉缸作为校验模型样本, 模型预测与样本的侵蚀形貌对比表明其相对误差平均值为 3.6%, 确认了炉缸侵蚀监测模型的可靠性.

**关 键 词:** 边界移动法; 梯度下降法; 炉缸侵蚀; 监测模型; 高炉

中图分类号: TP 549 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2015)01-0057-06

## Hearth Erosion Monitoring Model of Blast Furnace Based on Boundary Movement Method

LI Qiang<sup>1</sup>, FENG Ming-xia<sup>2</sup>, CHU Wen<sup>3</sup>, ZOU Zong-shu<sup>1</sup>

(1. School of Materials & Metallurgy, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Metallurgy Engineering College, Liaoning Institute of Science and Technology, Benxi 117004, China; 3. Ironmaking Plant, Baoshan Iron and Steel Co. Ltd., Shanghai 201900, China. Corresponding author: FENG Ming-xia, E-mail: fengmingxia@gmail.com)

**Abstract:** A hearth erosion monitoring model for blast furnace was proposed based on the temperature data from the embedded thermocouples in the blast furnace hearth, and combining the numerical heat transfer calculation and gradient descent method of optimization theory to find the optimum boundary moving step length factor. The unknown-boundary inverse heat-transfer problem can be effectively solved with the model. Using the monitoring temperature data from thermocouples as input, the hearth inner lining erosion profile and residual thickness were computationally obtained by the proposed model through solving the unknown-boundary heat-transfer problem. Taking the collected known hearth erosion profiles and the corresponding temperature data from thermocouples as check samples, the comparison shows that the average relative error of the model prediction is about 3.6%, and the reliability of the model is thus confirmed.

**Key words:** boundary movement method; gradient descent method; hearth erosion; monitoring model; blast furnace

高炉的日益大型化和复杂化使得高炉大修成本相当巨大, 而炉缸、炉底的寿命是一代高炉寿命的限制性环节之一<sup>[1-4]</sup>. 虽然高炉的炉龄大幅提高, 但近几年也经常发生炉缸、炉底烧穿事故. 由于高炉炉缸内始终存在渣铁而不能进行清空, 使

得其不能像其他部位那样, 在生产过程中进行修补. 因此, 高炉炉缸、炉底的工作状态和寿命对于高炉获得良好的技术经济指标和延长高炉寿命都具有重要意义. 通常对于炉缸侵蚀模型的研究主要分为两大类: 一类为侵蚀机理解析模型<sup>[5-7]</sup>, 给

出渣铁环流、出铁口深度、料柱是否沉坐等因素如何影响炉缸的侵蚀;另一类为炉缸侵蚀程度监测预报模型<sup>[8-10]</sup>,给出炉缸当前侵蚀曲线及残厚形貌. 本文提出一种利用埋入热电偶在线监测高炉炉缸、炉底砖衬残余厚度的“边界移动”方法,将未知边界传热反问题转化成无约束最优化求解问题. 依据数值传热学和有限元法建立高炉炉缸、炉底稳态传热数学模型,计算获得温度分布,以预埋热电偶反馈温度值为已知数据输入,采用最优化相关理论为基础,迭代求得可移动边界移动步长,经迭代计算输出炉缸内壁侵蚀形貌和炉衬残余厚度.

## 1 炉缸侵蚀监测模型

### 1.1 开发思路

其基本原理为:使用“边界移动”的方法,将未知边界传热反问题转化成无约束最优化求解问题. 具体求解过程:已知炉缸内衬形貌,基于炉缸炉底稳态传热数学模型计算得到温度场分布,与预埋热电偶反馈温度值比较,根据温度梯度,按最优化的梯度下降法计算移动步长因子和方向,进行边界移动,重新构造炉缸形貌;迭代计算直到预测温度和热电偶反馈温度满足指定精度,停止计算,输出炉缸内壁侵蚀形貌和炉衬残余厚度. 流程计算图详见图 1.

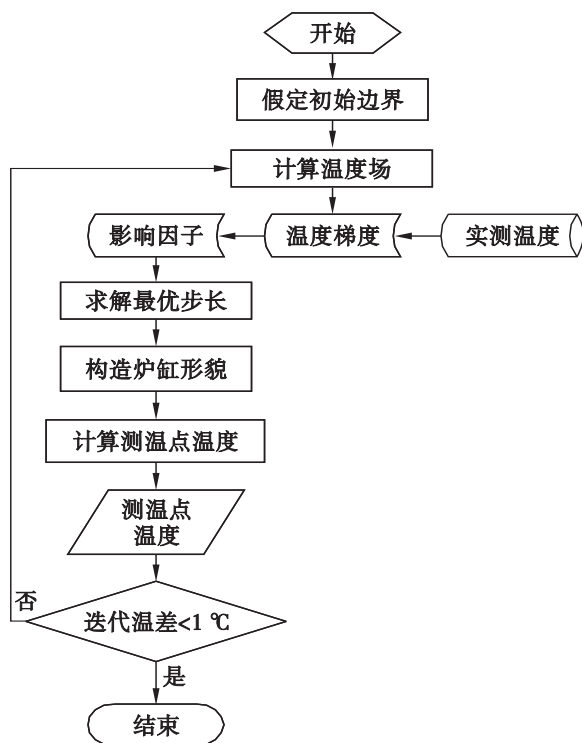


图 1 高炉炉缸侵蚀监测模型流程图

Fig. 1 Flow chart of hearth erosion monitoring model for blast furnace

建立的炉缸、炉底侵蚀监测模型主要包含三部分:炉缸温度场计算模块、最优步长计算模块和炉缸形貌构造模块,这三个模块为并列关系,分别负责计算不同的参数. 温度场计算模块以炉缸传热数学模型为基础,使用有限元法进行不同形貌的炉缸温度场的计算和温度梯度的计算;最优步长计算模块以最优化理论为基础,进行最优步长的迭代计算;炉缸形貌构造模型根据最优步长移动内边界可移动点并将其依次连接构造造成炉缸侵蚀残余形貌.

### 1.2 计算条件

本文以典型的“陶瓷杯 + 碳砖”复合式高炉炉缸结构为原型,为说明模型的有效性又不至于使问题太复杂,对原型进行合理简化. 图 2a 给出了本文采用的目前被广泛使用的“陶瓷杯 + 碳砖”复合式炉缸、炉底结构,内层为刚玉预制块,即“陶瓷杯”;炉壁及炉底夹层采用微孔碳砖;炉缸底部采用普通碳砖,其各层的物理性能详见表 1. 计算过程以炉缸、炉底耐火材料夹层中预埋热电偶的反馈温度为参考数据. 图 2b 为炉缸热电偶布置示意图,热电偶埋入微孔碳砖中,采用单层热电偶布置结构. 本文采用有限元法进行温度场的求解计算. 基本求解思想是把计算域划分为有限个互不重叠的单元,在每个单元内,选择一些合适的节点作为求解函数的插值点,将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的节点值与所选用的插值函数组成的线性表达式,借助于变分原理或加权余量法,将微分方程离散求解. 网格划分如图 2c 所示,使用自适应网格划分方式,这种方法可以在某些计算精度要求较高的部位自动细化网格.

### 1.3 影响因子

影响因子定义为:当炉缸内表面任意一个可移动节点  $i$  沿其温度梯度方向移动一个步长时,炉缸测温点温度值将产生变化,变化值分别为  $\Delta t_{i,1}, \Delta t_{i,2}, \dots, \Delta t_{i,13}$ ,将  $\Delta t_{i,j}$  称为影响因子. 其物理意义为第  $i$  个节点缩进一个步长将对编号为  $j$  的热电偶造成温度波动. 本文为说明问题,将炉缸、炉底内侧边界简化为共计 20 个可移动节点,预置热电偶数量为 13 个,因此每当 20 个可移动节点位置确定时,若需继续迭代,就要计算共  $13 \times 20 = 260$  个影响因子. 因此,要计算得出影响因子,就需计算炉缸温度场以及每次移动一个可移动点后的温度场. 炉缸形貌因迭代每发生一次变化都需要计算一次影响因子,由于影响因子过多,在此不赘述. 下面结合图 3a 以未侵蚀时原始炉缸形貌为例,列出移动 14 号节点计算得出的影响因子进行解释说明.

表 1 炉缸材料的物理性能  
Table 1 Physical properties of hearth materials

材料	参数	温度/℃					
		20	100	300	600	1 000	1 400
普通碳砖	密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	1 550	—	—	—	—	—
	导热系数/( $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	10. 90	10. 90	11. 35	12. 70	—	—
微孔碳砖	密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	1 710	—	—	—	—	—
	导热系数/( $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	20. 80	20. 80	20. 95	21. 60	—	—
刚玉预制块	密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	3 350	—	—	—	—	—
	导热系数/( $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	7. 30	6. 59	5. 15	3. 90	3. 80	4. 30

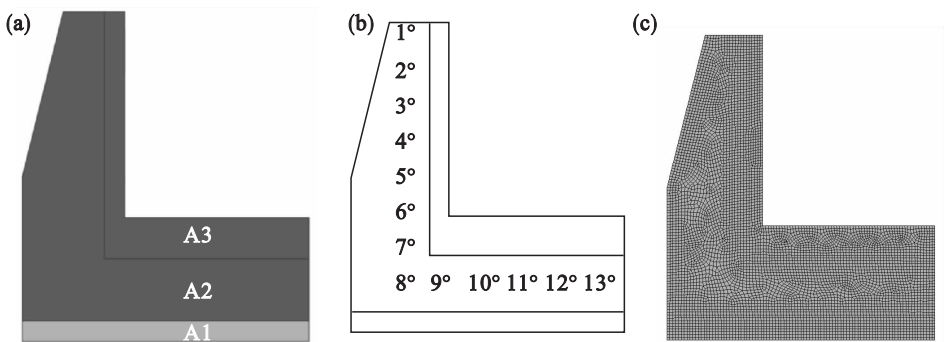


图 2 “陶瓷杯 + 碳砖”炉缸炉底结构、热电偶布置及网格划分示意图  
Fig. 2 Schematic diagram for hearth structure with ceramic cup and carbon brick, thermal couple arrangements and computation grids

(a) — 炉缸炉底结构；(b) — 热电偶布置简图；(c) — 自适应网格划分。

图 3a 为影响因子计算方法示意图。以 14 号节点为例，当 14 号节点沿其温度梯度负方向移动一个步长时（如图 3 箭头所示），炉缸形貌将发生变化，因此温度场也会随之改变。如表 2 所示，测温点处温度值会产生波动，因移动内边界节点而在测温点上产生的温差称作影响因子。

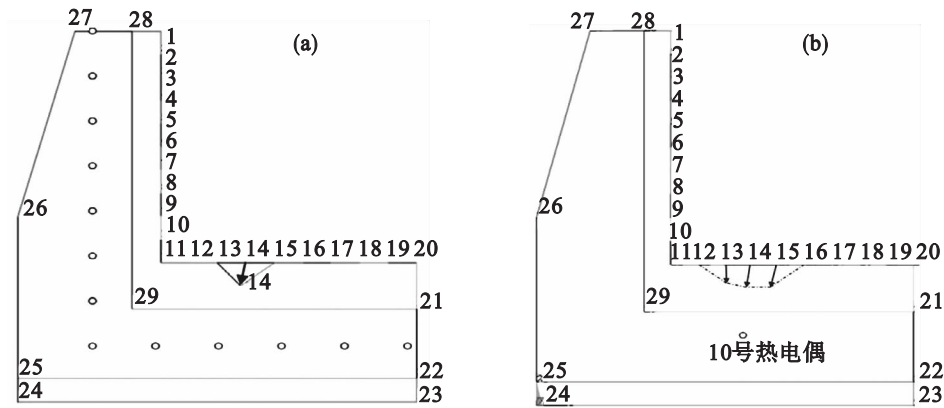


图 3 影响因子及最优步长计算方法示意图  
Fig. 3 Schematic diagram for impact factor and the optimum step length  
(a) — 影响因子计算方法；(b) — 影响因子最优步长计算集合。

1. 4 最优步长计算

将炉缸炉底内壁看作是由 20 个可移动的点按一定顺序依次连接的曲线，如图 3 所示。而这 20 个点可以沿各自位置的温度梯度方向移动不同的步长，而步长的大小则需由最优步长计算模块计算得出。最优步长计算模块主要是根据最优

化理论建立起来的，是整个高炉炉缸炉底侵蚀监测模型的关键部分。由温度场计算模型计算影响因子及测温处温度值，从而将不定边界传热反问题转化为最优化求解问题。

温度场计算模块计算出的影响因子为

$$\Delta t = \begin{bmatrix} \Delta t_{1,1} & \Delta t_{1,2} & \cdots & \Delta t_{1,13} \\ \Delta t_{2,1} & \Delta t_{2,2} & \cdots & \Delta t_{2,13} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta t_{20,1} & \Delta t_{20,2} & \cdots & \Delta t_{20,13} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

假设最优步长为

$$\boldsymbol{P} = [p_1, p_2, \cdots, p_{20}], \quad (2)$$

设  $\boldsymbol{P} \times \Delta t = f(\boldsymbol{P})$ ,

$$\left. \begin{aligned} f_1(\boldsymbol{P}) &= (\Delta t_{1,1} \times p_1 + \Delta t_{2,1} \times p_2 + \cdots + \Delta t_{20,1} \times p_{20} - \Delta t_1)^2, \\ f_2(\boldsymbol{P}) &= (\Delta t_{1,2} \times p_1 + \Delta t_{2,2} \times p_2 + \cdots + \Delta t_{20,2} \times p_{20} - \Delta t_2)^2, \\ &\vdots \\ f_{13}(\boldsymbol{P}) &= (\Delta t_{1,13} \times p_1 + \Delta t_{2,13} \times p_2 + \cdots + \Delta t_{20,13} \times p_{20} - \Delta t_{13})^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中  $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_{13}$  分别为 1 ~ 13 号热电偶初始时刻温度值与实测温度值的差值.

令  $F(\boldsymbol{P}) = f_1(\boldsymbol{P}) + f_2(\boldsymbol{P}) + \cdots + f_{13}(\boldsymbol{P})$ , 现将最优步长  $\boldsymbol{P} = [p_1, p_2, \cdots, p_{20}]$  设为自变量, 将  $F(\boldsymbol{P})$  设为目标函数, 进行无约束最优化问题的求解.

表 2 初始时刻 14 号节点的影响因子  
Table 2 Impact factor of number 14 node at initial time

编号	标高 m	半径 m	原始温度 ℃	14 号节点 温度/℃	$\Delta t_{14,j}$ ℃
1	5.5	8.0	242.047	242.047	0.000
2	5.5	7.0	236.352	236.353	-0.001
3	5.5	6.0	305.911	305.916	-0.005
4	5.5	5.0	332.236	332.252	-0.016
5	5.5	4.0	313.615	313.656	-0.041
6	5.5	3.0	278.045	278.129	-0.084
7	5.5	2.0	179.467	179.546	-0.079
8	5.5	1.0	100.728	100.761	-0.033
9	4.5	1.0	150.411	150.446	-0.035
10	3.5	1.0	188.965	188.983	-0.018
11	2.5	1.0	208.535	208.546	-0.009
12	1.5	1.0	218.547	218.554	-0.007
13	0.5	1.0	221.553	221.557	-0.004

使用影响因子求解各节点最优步长的集合, 此步长的集合能使各节点移动对每个测温点温度造成的叠加影响都最接近初始时刻与当前时刻热电偶温差. 图 3 为影响因子计算方法示意图. 当 10 号热电偶当前实测温度与初始时刻(即炉缸未被侵蚀时)的温差不为零时, 就需要移动内边界上可移动节点, 可移动节点移动步长以移动后每个测温点温度造成的叠加影响都最接近初始时刻与当前时刻热电偶温差为准. 当使用最优梯度法

进行迭代求解时, 若所求步长小于等于初始步长的 20% 时, 迭代终止, 将得到的最后值当作最优解输出. 使用最优梯度法完成一次迭代后需重新构造炉缸炉型, 并重新计算影响因子, 再使用最优梯度法进行迭代求解. 直到满足相邻两次迭代得出的所有测温点温差均小于等于 1℃, 整个循环过程终止.

1.5 炉缸形貌构造

构造机理是将有限个节点按顺序依次连接构造成线; 再将这些线按顺序连接, 围成平面; 最后将各个平面连接在一起就形成了炉缸模型. 构造炉缸形貌最基本的要素是节点, 可将这些节点分为可移动节点和不可移动节点两类: 不可移动节点是指构造炉壁外侧、炉缸夹层、炉底底部的节点; 可移动节点是指构造炉缸、炉底内壁侵蚀线的节点. 可移动节点的移动量由两项参数确定, 分别是移动方向和移动步长. 移动方向即为温度场计算模块计算得出的节点处温度梯度方向; 移动步长即为最优步长计算模块计算得出的最优步长. 可移动节点经过移动后按照编号 1 ~ 20 的顺序依次连接, 并与不可移动节点连接成的线按次序连接即可形成炉缸侵蚀形貌.

2 模型可靠性及误差讨论

为了验证模型的可靠性和确认计算结果误差, 本文构造了一个已经被侵蚀的高炉炉缸形貌作为样本, 并计算其温度场, 将侵蚀样本测温点温度记录下来, 然后输入侵蚀监测模型中进行计算分析, 将计算得出的炉缸侵蚀形貌以及炉衬残余厚度与样本进行对比分析. 构造样本时考虑到高炉通常会发生不均匀侵蚀的情况, 因此构造样本时将高炉炉缸在工作状态下的实际炉壁残余厚度的情况进行模拟. 将炉壁与炉底交界处设计为侵蚀比较严重的情况, 而随着炉壁高度的增加, 侵蚀状况有所减轻, 炉衬被侵蚀的厚度逐渐减小. 靠

近炉壁一侧炉底侵蚀比较剧烈,砖衬残余厚度较小,靠近炉缸中心线一侧炉壁侵蚀较弱,砖衬残余厚度与初始时刻相比变化不大.图 4 给出了样本炉缸的侵蚀形貌和温度分布云图,其中测温点温度由表 3 列出.

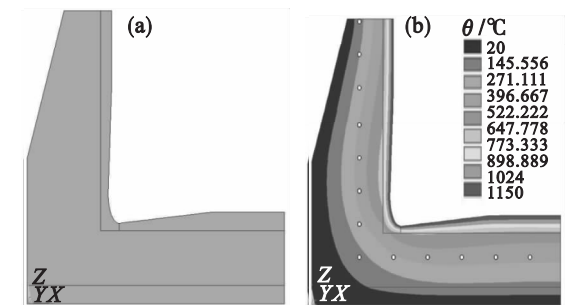


图 4 样本炉缸的侵蚀形貌及温度场分布图  
Fig. 4 Temperature field distribution and lining erosion profile of the sample hearth  
(a)一样本侵蚀形貌;(b)一样本温度分布.

表 3 测温点温度值对比		Table 3 Comparison of temperatures at measurement points						℃
热电偶号	原炉型	迭代次数				侵蚀样本		
		1 次	2 次	3 次	4 次			
1	242.047	250.585	274.184	273.122	273.243	323.996		
2	236.352	255.240	278.993	278.755	279.042	317.796		
3	305.911	355.720	388.482	390.327	390.960	371.325		
4	332.236	412.830	448.981	455.230	455.504	472.657		
5	313.615	427.607	457.789	466.846	466.842	510.264		
6	278.045	475.169	477.990	485.431	485.167	482.525		
7	179.467	332.898	324.302	331.151	330.924	347.414		
8	100.728	167.997	168.168	171.598	171.516	207.673		
9	150.411	239.836	247.304	252.060	251.985	305.161		
10	188.965	269.728	288.182	292.111	292.084	350.643		
11	208.535	272.718	297.162	300.066	300.068	352.970		
12	218.547	268.067	294.275	296.368	296.384	344.788		
13	221.553	263.778	288.642	290.347	290.365	339.516		

由表 3 可以看出,随着迭代的进行,测温点温度值从初始状态开始越来越接近样本温度.当迭代 4 次后收敛,温度值变化不大.

表 4 列出了炉衬残余厚度计算结果,可以看出计算得出的炉衬残余厚度沿高度和径向的变化趋势与样本基本相同.相对误差的平均值为 3.6%,说明模型具有较高可靠性.

表 4 炉衬残余厚度计算结果				
Table 4 Computational results of the inner lining residual thickness				
节点编号	实际残厚	计算残厚	绝对误差	相对误差
	mm	mm	mm	%
1	1 300.0	1 471.8	171.8	11.7
2	1 444.0	1 567.9	123.9	7.0
3	1 580.5	1 658.5	78.1	4.8
4	1 714.8	1 755.6	40.8	2.9
5	1 840.4	1 860.2	19.8	1.7
6	1 953.4	1 968.9	15.5	1.5
7	2 062.8	2 090.2	27.4	2.0
8	2 178.3	2 190.4	12.1	1.4
9	2 224.6	2 238.7	14.0	0.5
10	2 206.5	2 195.7	-10.8	-0.7
11	2 219.0	2 163.1	-55.9	-0.3
12	2 241.7	2 397.8	156.1	6.6
13	2 299.8	2 481.8	182.0	7.3
14	2 327.7	2 514.2	186.5	6.4
15	2 388.9	2 554.2	165.3	5.4
16	2 454.9	2 624.2	169.3	5.6
17	2 500.0	2 624.3	124.3	4.7
18	2 500.0	2 627.2	127.2	4.8
19	2 500.0	2 583.8	83.8	3.2
20	2 500.0	2 939.4	439.4	15.0

3 结 论

- 1) 以预置热电偶反馈温度为主要数据,使用最优化理论联合炉缸“边界移动”的方法,建立了计算炉衬残余厚度和炉缸侵蚀形貌的模型.
- 2) 使用建立的高炉炉缸侵蚀监测模型计算炉缸残余形貌和厚度,通过使用样本对模型可靠性和准确程度进行分析,相对误差平均值为 3.6%.此模型能够较精确计算出炉缸炉底侵蚀残余边界.
- 3) 建立最优化数学模型,将未知边界传热反问题转化为最优化求解问题是有效的.

参考文献:

[ 1 ] Liu Z J,Zhang J L,Zuo H B,et al. Recent progress on long service life design of Chinese blast furnace hearth [J]. *ISIJ International*,2012,52( 10 ):1713 - 1723.

- [2] Zhang F M. Design and operation control for long campaign life of blast furnaces [J]. *Journal of Iron and Steel Research International*, 2013, 20(9): 53–60.
- [3] Johnny B, Henrik S. Model for fast computation of blast furnace hearth erosion and buildup profiles [J]. *Industry & Engineering Chemistry Research*, 2008, 47(20): 7793–7801.
- [4] Shinotake A, Nakamura H, Yadoumaru N, et al. Investigation of blast furnace hearth sidewall erosion by core sample analysis and consideration of campaign operation [J]. *ISIJ International*, 2003, 43(3): 321–330.
- [5] Huang C E, Du S W, Cheng W T. Numerical investigation on hot metal flow in blast furnace hearth through CFD [J]. *ISIJ International*, 2008, 48(9): 1182–1187.
- [6] Guo B, Maldonado D, Zulli P, et al. CFD modelling of liquid metal flow and heat transfer in blast furnace hearth [J]. *ISIJ International*, 2008, 48(12): 1676–1685.
- [7] Yu Z, Rohit D, Cheng Q Z, et al. Numerical analysis of blast furnace hearth inner profile by using CFD and heat transfer model for different time periods [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, 51(2): 186–197.
- [8] 陈良玉, 李玉, 王子金, 等. 传热边界逆解在高炉炉缸侵蚀诊断中的应用[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2009, 30(8): 135–1138.
- (Chen Liang-yu, Li Yu, Wang Zi-jin, et al. Application of inverse solution to boundary of heat transfer in erosion diagnosis of blast furnace hearth [J]. *Journal of Northeastern University: Natural Science*, 2009, 30(8): 1135–1138.)
- [9] 石琳, 程素森, 左海滨. 高炉炉衬侵蚀边界识别的数值模拟[J]. 钢铁研究学报, 2006, 18(4): 1–5.
- (Shi Lin, Cheng Su-sen, Zuo Hai-bin. Numerical simulation of erosion boundary identification of blast furnace lining [J]. *Journal Iron and Steel Research*, 2006, 18(4): 1–5.)
- [10] Zagaria M, Dimastromatteo V, Colla V. Monitoring erosion and skull profile in blast furnace hearth [J]. *Ironmaking & Steelmaking*, 2010, 37(3): 229–234.

(上接第 46 页)

## 参考文献:

- [1] Jing L, Wang X D, Zhang Z T. Crystallization behavior of rutile in the synthesized Ti-bearing blast furnace slag using single hot thermocouple technique [J]. *ISIJ International*, 2011, 51(9): 1396–1402.
- [2] Wu Z, Li Z, Zhang J H, et al. Crystallization and coarsening kinetics of rutile phase in modified Ti-bearing blast furnace slag [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2012, 51(38): 12294–12298.
- [3] 马鸿文. 工业矿物与岩石 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2011: 398–399.
- (Ma Hong-wen. *Industrial minerals and rocks* [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2011: 398–399.)
- [4] 刘焕明, 杜红, 杨祖磐, 等. 高炉型熔渣中  $\text{TiO}_2$  的活度 [J]. 金属学报, 1992, 28(2): B45–B49.
- (Liu Huan-ming, Du Hong, Yang Zu-pan, et al. The activity of  $\text{TiO}_2$  in blast furnace type slags [J]. *Acta Metallurgica Sinica*, 1992, 28(2): B45–B49.)
- [5] Jung S M, Fruehan R J. Thermodynamics of titanium oxide in ladle slags [J]. *ISIJ International*, 2001, 41(12): 1447–1453.
- [6] Morizane Y, Ozturk B, Fruehan R J. Thermodynamics of  $\text{TiO}_x$  in blast furnace-type slags [J]. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 1999, 30(1): 29–43.
- [7] Zhang J. Application of the coexistence theory of slag structure to multicomponent slag systems [C] //Proceeding of the 4th International Conference on Molten Slags and Fluxes. Sendai: Iron and Steel Institute of Japan, 1992: 244–249.
- [8] Verein Deutscher Eisenhüttenleute (VDEh). Slag atlas [M]. Dusseldorf: Verlag Stahleisen GmbH, 1995: 39–186.
- [9] 梁英教, 车荫昌. 无机物热力学数据手册 [M]. 沈阳: 东北大学出版社, 1994: 449–479.
- (Liang Ying-jiao, Che Yin-chang. *Inorganic thermodynamic data manual* [M]. Shenyang: Northeastern University Press, 1994: 449–479.)
- [10] Kume K, Morita K, Miki T, et al. Activity measurement of  $\text{CaO-SiO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3\text{-5-MgO}$  slags equilibrated with molten silicon alloys [J]. *ISIJ International*, 2000, 40(6): 561–566.
- [11] 王明玉, 张力, 张林楠, 等. 含钛高炉渣中钛组分最佳富集相的选择 [J]. 材料与冶金学报, 2005, 4(3): 175–177.
- (Wang Ming-yu, Zhang Li, Zhang Lin-nan, et al. Study on selection of the best titania enrichment phase in titanium-bearing slag [J]. *Journal of Materials and Metallurgy*, 2005, 4(3): 175–177.)
- [12] 李辽沙, 隋智通.  $\text{TiO}_2$  选择性富集的物理化学行为 [J]. 物理化学学报, 2001, 17(9): 845–849.
- (Li Liao-sha, Sui Zhi-tong. The physical and chemical behavior of  $\text{TiO}_2$  selective enrichment [J]. *Acta Physico-Chimica Sinica*, 2001, 17(9): 845–849.)