第36卷第2期 东北大学学报(自然科学版) Vol.36,No.2
2015年2月 Journal of Northeastern University(Natural Science) Feb. 2015

doi:10.3969/j.issn.1005-3026.2015.02.032

乘积空间中凹泛函型锥拉伸与压缩不动点定理

张国伟,张秀萍
(东北大学 理学院,辽宁 沈阳 110819)

摘 要:考虑赋范线性空间的乘积空间,由因子空间中的锥生成乘积空间中的锥.全连续算子定义在乘积空间中锥与两个闭球相交得到的有界闭集上,并且值域在锥中.在由锥上一类非负正齐次凹泛函表示的混合型锥拉伸与压缩条件下,利用构造性方法将其转化为Schauder型问题,证明了几个全连续算子的不动点定理.通过例子说明这里所需要的凹泛函在常用的空间及其锥上是容易构造的.

关 键 词:不动点;全连续算子;锥拉伸与压缩;凹泛函;乘积空间

中图分类号:O 177.91 **文献标志码**:A **文章编号**:1005-3026(2015)02-0301-04

Fixed Point Theorems of Cone Expansion and Compression of Concave Functional Type in Product Space

ZHANG Guo-wei, *ZHANG Xiu-ping*
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: ZHANG Guo-wei, professor, E-mail: gwzhangneum@sina.com)

Abstract: A product space of normed linear spaces is considered, and the cone in the product space is produced by the cones in its factor spaces. A completely continuous operator is in the product space defined on the bounded closed set which is the intersection of the cone with two closed balls, and the range is in the cone. Under the mixed cone expansion and compression conditions that are expressed through a class of nonnegative, positively homogeneous, concave functionals on the cone, some fixed point theorems about the completely continuous operator are proved by constructing methods and converting them into the problems of Schauder type. It is illustrated by example that the concave functionals needed here are easily constructed in a common space and on a cone in it.

Key words: fixed point; completely continuous operator; cone expansion and compression; concave functional; product space

设 E 是实赋范线性空间,θ 表示 E 中的零元素,K 是 E 中的锥,见文献[1].在乘积空间 $E\times E=\{(u_1,u_2)\mid u_1,u_2\in E\}$ 中定义范数为 $\|(u_1,u_2)\|=\|u_1\|+\|u_2\|$.设 K_1 和 K_2 是 E 中的两个锥,易证 $K_1\times K_2$ 为乘积空间 $E\times E$ 中的锥.如果 $0<r_i<R_i(i=1,2)$,定义 $K_{r,R}=(K_1)_{r_1,R_1}\times(K_2)_{r_2,R_2}$,其中

$$(K_i)_{r_i,R_i}=\{u_i\in K_i\mid r_i\leqslant\|u_i\|\leqslant R_i\}(i=1,2).$$

如果算子 $A_i:K_1\times K_2\to E(i=1,2)$ 是全连续的,则称 $A=(A_1,A_2)$ 是全连续的.文献[2]在乘积空间中证明了由锥导出的半序型锥拉伸与压缩不动点定理.泛函型锥拉伸与压缩全连续算子的不动点定理及其应用见文献[3-13].本文在乘积空间证明了几个凹泛函型混合锥拉伸与压缩条件下的不动点定理.设 $\alpha:K\to[0,+\infty)$ 为凹泛函,如果 $\alpha(\lambda x)=\lambda\alpha(x)$,$\forall\lambda\geqslant0$,$\forall x\in K$,则称 α 正齐次.

1 主要结论

以下均假设 $A=(A_1,A_2):K_{r,R}\to K_1\times K_2$ 全连续,$\alpha_i:K_i\to[0,+\infty)$ 是非负正齐次凹泛函,

收稿日期:2013-11-29
基金项目:辽宁省自然科学基金资助项目(201102070).
作者简介:张国伟(1965-),男,辽宁沈阳人,东北大学教授.

$\alpha_i(x)>0$, $\forall x\in K_i\setminus\{\theta\}$ $(i=1,2)$.

定理 1 如果下列条件满足:

$$\|u_1\|=r_1\Rightarrow\alpha_1(A_1(u))\geqslant\alpha_1(u_1),$$
$$\|u_1\|=R_1\Rightarrow\alpha_1(A_1(u))\leqslant\alpha_1(u_1),$$
$$\|u_2\|=r_2\Rightarrow\alpha_2(A_2(u))\geqslant\alpha_2(u_2),$$
$$\|u_2\|=R_2\Rightarrow\alpha_2(A_2(u))\leqslant\alpha_2(u_2),$$

其中 $u=(u_1,u_2)\in K_{r,R}$, 那么 A 在 $K_{r,R}$中存在不动点.

证明 令 $h=(h_1,h_2)\in K_1\times K_2$, $h_i\neq\theta$ $(i=1,2)$. 定义$\overline{A}:K_1\times K_2\to K_1\times K_2$ 如下(其中记$[r_i]=r_i/\|u_i\|$, $[R_i]=R_i/\|u_i\|$ $(i=1,2)$):

如果 $u_1=0$ 或 $u_2=0$, 则$\overline{A}(u)=h$;

如果 $0<\|u_1\|<r_1$ 且 $0<\|u_2\|<r_2$, 则
$$\overline{A}(u)=\min\{[r_1]^{-1},[r_2]^{-1}\}A([r_1]u_1,[r_2]u_2)+(1-\min\{[r_1]^{-1},[r_2]^{-1}\})h;$$

如果 $0<\|u_1\|<r_1$ 且 $r_2\leqslant\|u_2\|\leqslant R_2$, 则
$$\overline{A}(u)=[r_1]^{-1}A([r_1]u_1,u_2)+(1-[r_1]^{-1})h;$$

如果 $0<\|u_1\|<r_1$ 且 $\|u_2\|>R_2$, 则
$$\overline{A}(u)=[r_1]^{-1}A([r_1]u_1,[R_2]u_2)+(1-[r_1]^{-1})h;$$

如果 $r_1\leqslant\|u_1\|\leqslant R_1$ 且 $0<\|u_2\|<r_2$, 则
$$\overline{A}(u)=[r_2]^{-1}A(u_1,[r_2]u_2)+(1-[r_2]^{-1})h;$$

如果 $r_1\leqslant\|u_1\|\leqslant R_1$ 且 $r_2\leqslant\|u_2\|\leqslant R_2$, 则 $\overline{A}(u)=A(u)$;

如果 $r_1\leqslant\|u_1\|\leqslant R_1$ 且 $\|u_2\|>R_2$, 则
$$\overline{A}(u)=A(u_1,[R_2]u_2);$$

如果 $\|u_1\|>R_1$ 且 $0<\|u_2\|<r_2$, 则
$$\overline{A}(u)=[r_2]^{-1}A([R_1]u_1,[r_2]u_2)+(1-[r_2]^{-1})h;$$

如果 $\|u_1\|>R_1$ 且 $r_2\leqslant\|u_2\|\leqslant R_2$, 则
$$\overline{A}(u)=A([R_1]u_1,u_2);$$

如果 $\|u_1\|>R_1$ 且 $\|u_2\|>R_2$, 则
$$\overline{A}(u)=A([R_1]u_1,[R_2]u_2).$$

易见$\overline{A}$是连续的, 由于它的值域包含于紧集$\overline{co}\{A(K_{r,R})\cup\{h\}\}$, 所以又是紧的. 根据 Schauder 不动点定理[1], 存在 $u\in K_1\times K_2$ 使得 $\overline{A}(u)=u$. 下面证明 $u\in K_{r,R}$, 否则与条件矛盾, 于是 $A(u)=u$. 由于 $h_i\neq0(i=1,2)$, 显然 $\|u_1\|>0$ 且 $\|u_2\|>0$.

如果 $0<\|u_1\|<r_1$ 且 $0<\|u_2\|<r_2$, 不妨设 $\min\{[r_1]^{-1},[r_2]^{-1}\}=[r_1]^{-1}$, 那么
$$u=\overline{A}(u)=[r_1]^{-1}A([r_1]u_1,[r_2]u_2)+(1-[r_1]^{-1})h,$$
$$u_1=[r_1]^{-1}A_1([r_1]u_1,[r_2]u_2)+(1-[r_1]^{-1})h_1.$$

由 α_1 的凹性知
$$\alpha_1(u_1)\geqslant[r_1]^{-1}\alpha_1(A_1([r_1]u_1,[r_2]u_2))+(1-[r_1]^{-1})\alpha_1(h_1)>[r_1]^{-1}\alpha_1(A_1([r_1]u_1,[r_2]u_2)),$$
$$\alpha_1([r_1]u_1)=[r_1]\alpha_1(u_1)>\alpha_1(A_1([r_1]u_1,[r_2]u_2)).$$

如果 $0<\|u_1\|<r_1$ 且 $r_2\leqslant\|u_2\|\leqslant R_2$, 则
$$u=\overline{A}(u)=[r_1]^{-1}A([r_1]u_1,u_2)+(1-[r_1]^{-1})h,$$
$$u_1=[r_1]^{-1}A_1([r_1]u_1,u_2)+(1-[r_1]^{-1})h_1.$$

由 α_1 的凹性知
$$\alpha_1(u_1)\geqslant[r_1]^{-1}\alpha_1(A_1([r_1]u_1,u_2))+(1-[r_1]^{-1})\alpha_1(h_1)>[r_1]^{-1}\alpha_1(A_1([r_1]u_1,u_2)),$$
$$\alpha_1([r_1]u_1)=[r_1]\alpha_1(u_1)>\alpha_1(A_1([r_1]u_1,u_2)).$$

如果 $0<\|u_1\|<r_1$ 且 $\|u_2\|>R_2$, 那么
$$u=\overline{A}(u)=[r_1]^{-1}A([r_1]u_1,[R_2]u_2)+(1-[r_1]^{-1})h,$$
$$u_1=[r_1]^{-1}A_1([r_1]u_1,[R_2]u_2)+(1-[r_1]^{-1})h_1.$$

由 α_1 的凹性知
$$\alpha_1(u_1)\geqslant[r_1]^{-1}\alpha_1(A_1([r_1]u_1,[R_2]u_2))+(1-[r_1]^{-1})\alpha_1(h_1)>[r_1]^{-1}\alpha_1(A_1([r_1]u_1,[R_2]u_2)),$$
$$\alpha_1([r_1]u_1)=[r_1]\alpha_1(u_1)>\alpha_1(A_1([r_1]u_1,[R_2]u_2)).$$

如果 $r_1\leqslant\|u_1\|\leqslant R_1$ 且 $0<\|u_2\|<r_2$, 则
$$u=\overline{A}(u)=[r_2]^{-1}A(u_1,[r_2]u_2)+(1-[r_2]^{-1})h,$$
$$u_2=[r_2]^{-1}A_2(u_1,[r_2]u_2)+(1-[r_2]^{-1})h_2.$$

由 α_2 的凹性知
$$\alpha_2(u_2)\geqslant[r_2]^{-1}\alpha_2(A_2(u_1,[r_2]u_2))+(1-[r_2]^{-1})\alpha_2(h_2)>[r_2]^{-1}\alpha_2(A_2(u_1,[r_2]u_2)),$$
$$\alpha_2([r_2]u_2)=[r_2]\alpha_2(u_2)>\alpha_2(A_2(u_1,[r_2]u_2)).$$

如果 $r_1\leqslant\|u_1\|\leqslant R_1$ 且 $\|u_2\|>R_2$, 那么
$$u=\overline{A}(u)=A(u_1,[R_2]u_2),$$从而
$$u_2=A_2(u_1,[R_2]u_2).$$ 于是
$$\alpha_2(A_2(u_1,[R_2]u_2))=\alpha_2(u_2)>[R_2]\alpha_2(u_2)=\alpha_2([R_2]u_2).$$

如果 $\|u_1\|>R_1$ 且 $0<\|u_2\|<r_2$, 那么
$$u=\overline{A}(u)=[r_2]^{-1}A([R_1]u_1,[r_2]u_2)+$$

$(1-[r_2]^{-1})h,$

$u_2=[r_2]^{-1}A_2([R_1]u_1,[r_2]u_2)+(1-[r_2]^{-1})h_2,$

由 α_2 的凹性知

$$\alpha_2(u_2)\geqslant[r_2]^{-1}\alpha_2(A_2([R_1]u_1,[r_2]u_2))+(1-[r_2]^{-1})\alpha_2(h_2)>[r_2]^{-1}\alpha_2(A_2([R_1]u_1,[r_2]u_2)),$$

$$\alpha_2([r_2]u_2)=[r_2]\alpha_2(u_2)>\alpha_2(A_1([R_1]u_1,[r_2]u_2)).$$

如果 $\|u_1\|>R_1$ 且 $r_2\leqslant\|u_2\|\leqslant R_2$，那么

$u=\overline{A}(u)=A([R_1]u_1,u_2),$

从而 $u_1=A_1([R_1]u_1,u_2)$. 于是

$$\alpha_1(A_1([R_1]u_1,u_2))=\alpha_1(u_1)>[R_1]\alpha_1(u_1)=\alpha_1([R_1]u_1).$$

如果 $\|u_1\|>R_1$ 且 $\|u_1\|>R_1$，那么

$u=\overline{A}(u)=A([R_1]u_1,[R_2]u_2),$

从而 $u_i=A_i([R_1]u_1,[R_2]u_2)$. 于是

$$\alpha_i(A_i([R_1]u_1,[R_2]u_2))=\alpha_i(u_i)>[R_i]\alpha_i(u_i)=\alpha_i([R_i]u_i)\ (i=1,2).$$

定理 2　如果下列条件满足：

$\|u_1\|=r_1\Rightarrow\alpha_1(A_1(u))\geqslant\alpha_1(u_1),$

$\|u_1\|=R_1\Rightarrow\alpha_1(A_1(u))\leqslant\alpha_1(u_1),$

$\|u_2\|=r_2\Rightarrow\alpha_2(A_2(u))\leqslant\alpha_2(u_2),$

$\|u_2\|=R_2\Rightarrow\alpha_2(A_2(u))\geqslant\alpha_2(u_2),$

其中 $u=(u_1,u_2)\in K_{r,R}$，那么 A 在 $K_{r,R}$ 中存在不动点.

证明　因为 $\forall u_2\in(K_2)_{r_2,R_2}$,

$([R_2]+[r_2]-1)u_2\in(K_2)_{r_2,R_2},$

所以可设 $A_1^*:K_{r,R}\to K_1\times K_2$ 为

$$A_1^*(u)=A_1(u_1,([R_2]+[r_2]-1)u_2);$$

可设 $A_2^*:K_{r,R}\to K_1\times K_2$ 为

$$A_2^*(u)=\frac{A_2(u_1,([R_2]+[r_2]-1)u_2)}{[R_2]+[r_2]-1}.$$

显然当 $\|u_2\|=r_2$ 时，$\|([R_2]+[r_2]-1)\times u_2\|=R_2$；当 $\|u_2\|=R_2$ 时，$\|([R_2]+[r_2]-1)u_2\|=r_2$. 因此算子 $A^*=(A_1^*,A_2^*)$ 满足定理 1 的条件，从而 A^* 存在不动点 $v=(v_1,v_2)\in K_{r,R}$.

令 $u=(u_1,u_2)$ 为 $u_1=v_1$,

$u_2=(R_2/\|v_2\|+r_2/\|v_2\|-1)v_2,$

易见 $u=(u_1,u_2)\in K_{r,R}$ 是 A 的不动点.

定理 3　如果下列条件满足：

$\|u_1\|=r_1\Rightarrow\alpha_1(A_1(u))\leqslant\alpha_1(u_1),$

$\|u_1\|=R_1\Rightarrow\alpha_1(A_1(u))\geqslant\alpha_1(u_1),$

$\|u_2\|=r_2\Rightarrow\alpha_2(A_2(u))\geqslant\alpha_2(u_2),$

$\|u_2\|=R_2\Rightarrow\alpha_2(A_2(u))\leqslant\alpha_2(u_2),$

其中 $u=(u_1,u_2)\in K_{r,R}$，那么 A 在 $K_{r,R}$ 中存在不动点.

证明　因为 $\forall u_1\in(K_1)_{r_1,R_1}$,

$([R_1]+[r_1]-1)u_1\in(K_1)_{r_1,R_1},$

所以可设 $A_1^{**}:K_{r,R}\to K_1\times K_2$ 为

$$A_1^{**}(u)=\frac{A_1(([R_1]+[r_1]-1)u_1,u_2)}{[R_1]+[r_1]-1};$$

可设 $A_2^{**}:K_{r,R}\to K_1\times K_2$ 为

$$A_2^{**}(u)=A_2(([R_1]+[r_1]-1)u_1,u_2).$$

显然当 $\|u_1\|=r_1$ 时，$\|([R_1]+[r_1]-1)\times u_1\|=R_1$；当 $\|u_1\|=R_1$ 时，$\|([R_1]+[r_1]-1)u_1\|=r_1$. 因此算子 $A^{**}=(A_1^{**},A_2^{**})$ 满足定理 1 的条件，从而 A^{**} 存在不动点 $v=(v_1,v_2)\in K_{r,R}$.

令 $u=(u_1,u_2)$ 为 $u_2=v_2$,

$u_1=(R_1/\|v_1\|+r_1/\|v_1\|-1)v_1,$

易见 $u=(u_1,u_2)\in K_{r,R}$ 是 A 的不动点.

定理 4　如果下列条件满足：

$\|u_1\|=r_1\Rightarrow\alpha_1(A_1(u))\leqslant\alpha_1(u_1),$

$\|u_1\|=R_1\Rightarrow\alpha_1(A_1(u))\geqslant\alpha_1(u_1),$

$\|u_2\|=r_2\Rightarrow\alpha_2(A_2(u))\leqslant\alpha_2(u_2),$

$\|u_2\|=R_2\Rightarrow\alpha_2(A_2(u))\geqslant\alpha_2(u_2),$

其中 $u=(u_1,u_2)\in K_{r,R}$，那么 A 在 $K_{r,R}$ 中存在不动点.

证明　因为 $\forall u_1\in(K_1)_{r_1,R_1}$,

$([R_1]+[r_1]-1)u_1\in(K_1)_{r_1,R_1},$

$\forall u_2\in(K_2)_{r_2,R_2},$

$([R_2]+[r_2]-1)u_2\in(K_2)_{r_2,R_2},$

所以可设 $A_1^{***}:K_{r,R}\to K_1\times K_2$ 为

$$A_1^{***}(u)=\frac{A_1(([R_1]+[r_1]-1)u_1,([R_2]+[r_2]-1)u_2)}{[R_1]+[r_1]-1};$$

可设 $A_2^{***}:K_{r,R}\to K_1\times K_2$ 为

$$A_2^{***}(u)=\frac{A_2(([R_1]+[r_1]-1)u_1,([R_2]+[r_2]-1)u_2)}{[R_2]+[r_2]-1}.$$

因此算子 $A^{***}=(A_1^{***},A_2^{***})$ 满足定理 1 的条件，从而 A^{***} 存在不动点 $v=(v_1,v_2)\in K_{r,R}$.

令 $u=(u_1,u_2)$ 为

$u_1=(R_1/\|v_1\|+r_1/\|v_1\|-1)v_1,$

$u_2=(R_2/\|v_2\|+r_2/\|v_2\|-1)v_2,$

易见 $u=(u_1,u_2)\in K_{r,R}$ 是 A 的不动点.

2 结 语

设 $E=C(G)$ 为 N 维欧氏空间 R^N 中非空有界闭集 G 上的连续函数空间，令

$$K=\{x\in C(G)\mid x(t)\geqslant 0,\min_{t\in G_0}x(t)\geqslant\varepsilon\|x\|\},$$

其中 $\varepsilon>0$，G_0 是 G 的非空闭子集. 显然 K 是 E 中的锥，定义

$$\alpha(x)=\min_{t\in G_0}x(t),\ \forall x\in K,$$

于是 α 是锥 K 上的非负正齐次凹泛函，并且 $\alpha(x)>0$，$\forall x\in K\backslash\{\theta\}$.

参考文献：

[1] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 2 版. 济南：山东科学技术出版社，2001.
(Guo Da-jun. Nonlinear functional analysis [M]. 2nd ed. Jinan：Shandong Science and Technology Press，2001.)

[2] Precup R. A vector version of Krasnoselskii fixed point theorem in cones and positive periodic solutions of nonlinear systems[J]. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*，2007，2(1)：141－151.

[3] Avery R，Henderson J，O'Regan D. Four functionals fixed point theorem[J]. *Mathematical and Computer Modelling*，2008，48(7/8)：1081－1089.

[4] Anderson D R，Zhai C. Positive solutions to semi-positone second-order three-point problems on time scales[J]. *Applied Mathematics and Computation*，2010，215(10)：3713－3720.

[5] Cabada A，Cid J A. Existence of a non-zero fixed point for nondecreasing operators via Krasnoselskii's fixed point theorem [J]. *Nonlinear Analysis：Theory，Method & Applications*，2009，71(5/6)：2114－2118.

[6] 费祥历，王峰，陈云. 关于一个新泛函的锥拉伸与压缩不动点定理及应用[J]. 纯粹数学与应用数学，2010，26(4)：547－553.
(Fei Xiang-li，Wang Feng，Chen Yun. A cone expansion and compression fixed point theorem about a new functional and its applications[J]. *Pure and Applied Mathematics*，2010，26(4)：547－553.)

[7] Han W，Jin Z，Kang S. Existence of positive solutions of nonlinear m-point BVP for an increasing homeomorphism and positive homomorphism on time scales[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*，2009，233(2)：188－196.

[8] Sun D D，Zhang G W. Computing the topological degree via semi-concave functionals [J]. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*，2012，39(1)：107－117.

[9] Wong J S W. Existence of positive solutions for second order multi-point boundary value problems [J]. *Differential Equations & Applications*，2012，4(2)：197－219.

[10] Wang F，Zhang F，Yu Y. Existence of positive solutions of Neumann boundary value problem via a convex functional compression-expansion fixed point theorem[J]. *Fixed Point Theory*，2010，11(2)：395－400.

[11] Zhai C. Positive solutions for semi-positone three-point boundary value problems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*，2009，228(1)：279－286.

[12] Zhang H，Sun J. Existence of positive solution to singular systems of second-order four-point BVPs[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computation*，2009，29(1/2)：325－339.

[13] Zhang G W，Sun J X. A generalization of the cone expansion and compression fixed point theorem and applications[J]. *Nonlinear Analysis：Theory，Method & Applications*，2007，67(2)：579－586.

(上接第 287 页)

[4] 蔡美峰，王鹏，赵奎，等. 基于遗传算法的岩体结构面的模糊 C 均值聚类方法[J]. 岩石力学与工程学报，2005，24(3)：371－376.
(Cai Mei-feng，Wang Peng，Zhao Kui，et al. Fuzzy C-means cluster analysis based genetic algorithm for automatic identification of joint sets [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*，2005，24(3)：371－376.)

[5] 卢波，丁秀丽，邬爱清. 岩体随机不连续面产状数据划分方法研究[J]. 岩石力学与工程学报，2007，26(9)：1809－1816.
(Lu Bo，Ding Xiu-li，Wu Ai-qing. Study on method of orientation data partitioning of randomly distributed discontinuities of rocks [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*，2007，26(9)：1809－1816.)

[6] Bezdek J C，Ehrlich R，Full W. FCM：the fuzzy C-means clustering algorithm[J]. *Computers & Geosciences*，1984，10(2)：191－203.

[7] Yang X S. Nature-inspired metaheuristic algorithms [M]. Beckington：Luniver Press，2008：79－90.

[8] 刘长平，叶春明. 一种新颖的仿生群智能优化算法：萤火虫算法[J]. 计算机应用研究，2011，28(9)：3295－3297.
(Liu Chang-ping，Ye Chun-ming. Novel bioinspired swarm intelligence optimization algorithm：firefly algorithm [J]. *Application Research of Computers*，2011，28(9)：3295－3297.)

[9] Yang X S. Stochastic algorithms：foundations and applications [M]. Berlin：Springer-Heidelberg，2009：169－178.

[10] Yang X S. Firefly algorithm，stochastic test functions and design optimisation[J]. *International Journal of Bio-Inspired Computation*，2010，2(2)：78－84.

[11] Horng M H. Vector quantization using the firefly algorithm for image compression[J]. *Expert Systems with Applications*，2012，39(1)：1078－1091.

[12] Xu L M，Chen J P，Wang Q，et al. Fuzzy C-means cluster analysis based on mutative scale chaos optimization algorithm for the grouping of discontinuity sets[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*，2013，46(1)：189－198.