

doi: 10.3969/j.issn.1005-3026.2015.03.005

改进全局和声算法在鲁棒极点配置中的应用

翟军昌, 高立群, 欧阳海滨, 孔祥勇

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 提出了改进全局和声搜索(IGHS)算法,给出了新的位置更新策略.通过引入新的位置更新策略,可以使算法动态产生解区间,提高了算法对解空间信息开发的能力,避免了因过早收敛而易陷入局部最优的不足.将所提出算法应用于线性系统的鲁棒极点配置中,克服了以往条件数优化计算中需要拟凸转化处理的不足,方便地实现了控制系统的任意极点配置.最后,针对文献中的多输入多输出系统进行仿真对比实验,实验结果表明本方法得到的闭环系统具有更好的鲁棒性.

关键词: 和声搜索;极点配置;鲁棒;条件数;状态反馈

中图分类号: TP 301.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2015)03-0322-05

Robust Pole Placement via Improved Global Harmony Search Algorithm

ZHAI Jun-chang, GAO Li-qun, OUYANG Hai-bin, KONG Xiang-yong

(School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: ZHAI Jun-chang, E-mail: zhajunchang@163.com)

Abstract: An improved global harmony search (IGHS) algorithm was proposed, and a novel position updating strategy was introduced in the IGHS algorithm. The interval solution can be generated dynamically with the proposed algorithm, and the ability of searching the solution space through the position updating strategy is improved, which prevents the phenomena of premature convergence and falling into a local optimum. The algorithm is employed in the robust pole placement problems, and it is easy to implement arbitrary pole placement for the linear control systems, and the convex conversion process in conventional condition number optimizations is not needed. Finally simulation investigation is carried out for a multivariable system, and the simulation result demonstrates the better robustness of the closed-loop system gained by the proposed algorithm.

Key words: harmony search; pole placement; robust; condition number; state feedback

控制系统极点在复平面上的分布决定了系统的动力学特征,通过极点配置可以提高系统的鲁棒性.针对鲁棒极点配置问题,文献[1]提出通过极小化特征向量矩阵谱条件数的方法实现状态反馈鲁棒极点配置问题.文献[2-3]中分别采用Newton方法和线性矩阵不等式(LMI)方法优化条件数.由于条件数具有非凸性,以上方法不能保证达到全局最优.文献[4]提出采用递归神经网络(RNN)方法解决鲁棒极点配置问题,虽然该方法得到了较好的结果,但需要转换成拟凸问题处理.

和声搜索(HS)算法是由Geem等^[5]提出的一种启发式优化算法.HS算法提出后受到人们的注意,不断地改进^[6-7],并且得到广泛的应用^[8-9].但HS及其改进算法仍存在着进一步提高寻优精度,解决陷入局部最优等问题.

本文首先提出了改进的全局和声搜索(IGHS)算法,通过修正位置更新操作提高算法的寻优精度.然后将IGHS算法应用于线性系统鲁棒极点配置中.对于条件数,可以直接进行非凸问题的优化计算,避免了拟凸转化.仿真结果验证了

本文方法的有效性.

1 改进全局和声搜索算法(IGHS)

1.1 NGHS 算法

NGHS 算法排除了 HS 算法中和声记忆库考虑概率 HMCR、基音调整概率 PAR 和基音调整步长 bw 三个参数. 引入了位置更新和变异操作.

NGHS 中位置更新操作如式(1)和式(2)所示:

$$\mathbf{x}_R = 2\mathbf{x}_j^{\text{best}} - \mathbf{x}_j^{\text{worst}}; \quad (1)$$

$$\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j^{\text{worst}} + \text{rand}() \times (\mathbf{x}_R - \mathbf{x}_j^{\text{worst}}). \quad (2)$$

其中: \mathbf{x}_R 为 $\mathbf{x}_j^{\text{worst}}$ 关于 $\mathbf{x}_j^{\text{best}}$ 的对称位置; $\mathbf{x}_j^{\text{best}}$ 表示最好和声向量的第 j 维分量; $\mathbf{x}_j^{\text{worst}}$ 表示最差和声向量的第 j 维分量; \mathbf{x}'_j 表示新生成和声向量的第 j 维分量. 由于位置更新操作容易陷入局部最优, 因此引入了下面的变异操作:

$$\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j^L + \text{rand}() \times (\mathbf{x}_j^U - \mathbf{x}_j^L). \quad (3)$$

其中, \mathbf{x}_j^L 和 \mathbf{x}_j^U 代表第 j 维和声分量的下界和上界.

在 NGHS 算法中, 位置更新操作能够提高算法的收敛性, 但容易陷入局部最优. 虽然通过变异操作增加了种群的多样性, 但不利于对局部信息的开发. 因此本文对 NGHS 算法进行了改进.

1.2 改进全局和声搜索(IGHS)算法

在新算法中重新引入 HMCR, 对于决策对称点 \mathbf{x}_R 的选取执行不同的操作, 从而实现位置更新. 以概率 HMCR 保留原算法中对称点 \mathbf{x}_R 的选取操作, 即式(1). 为了不降低新算法的收敛速度, 其中概率 HMCR 取较大的值, 用于保持原算法位置更新收敛快的特性, 这样可以使新和声以较大的概率向当前最优和声逼近. 以 $1 - \text{HMCR}$ 的概率执行新的选取对称点 \mathbf{x}_R 操作:

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_j^{\text{best}} - \text{rand}() \times (\mathbf{x}_j^{\text{best}} + \mathbf{x}_j^{\text{worst}}). \quad (4)$$

根据式(2)可知, 在 $1 - \text{HMCR}$ 的概率下引入式(4)的操作后, 使新和声以较小的步长进行局部信息精细的搜索, 这样有利于对解空间的局部信息开发, 有利于提高搜寻精度, 避免陷入局部最优.

在 IGHS 算法中重新引入 HMCR, 与其他 HS 及其改进算法不同, 它只用于考虑 $\mathbf{x}_j^{\text{worst}}$ 关于 $\mathbf{x}_j^{\text{best}}$ 的对称位置 \mathbf{x}_R 的选取.

IGHS 算法的具体描述如下:

步骤1 初始化参数. 设置和声记忆库大小 HMS, 最大迭代次数 J , HMCR 和基因变异率 p_m .

步骤2 初始化和声记忆库 HM. 确定范围 $[\mathbf{x}_j^L, \mathbf{x}_j^U]$, 随机产生 HMS 个和声向量存入和声库 HM 中.

步骤3 即兴创作产生新的和声向量.

for each dimension $j \in [1, N]$ do

if $\text{rand}() < \text{HMCR}$

$$\mathbf{x}_R = 2\mathbf{x}_j^{\text{best}} - \mathbf{x}_j^{\text{worst}}$$

else

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_j^{\text{best}} - \text{rand}() \times (\mathbf{x}_j^{\text{best}} + \mathbf{x}_j^{\text{worst}})$$

end

if $\mathbf{x}_R > \mathbf{x}_j^U$

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_j^U$$

else if $\mathbf{x}_R < \mathbf{x}_j^L$

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_j^L$$

end

$$\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j^{\text{worst}} + \text{rand}() \times (\mathbf{x}_R - \mathbf{x}_j^{\text{worst}})$$

if $\text{rand}() \leq p_m$ then

$$\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j^L + \text{rand}() \times (\mathbf{x}_j^U - \mathbf{x}_j^L)$$

end

end

步骤4 更新和声记忆库. 用新和声更新和声记忆库中的最差和声.

步骤5 判断终止准则. 如果当前迭代次数等于最大迭代次数 J , 则终止运行 IGHS 算法, 否则重复执行步骤3和步骤4.

在 IGHS 算法中, 参数 HMCR 取值较大可以提高算法的收敛性; 反之可以增加和声记忆库多样性, 但影响算法收敛速度. 通过仿真实验, 当参数 $\text{HMCR} \geq 0.9$ 时, 算法具有较好的寻优性能.

为验证 IGHS 算法的性能, 本文将其与 HS^[6], SGHS^[7] 和 NGHS^[8] 算法进行对比实验. 选取文献[8]中的5个标准测试函数, f_1 (Sphere), f_2 (Rosenbrock), f_3 (Rastrigrin), f_4 (Griewank) 和 f_5 (Ackley), 其最优值均为0. 实验中 IGHS 算法的两个主要参数, HMCR 取0.9, 基因变异率 p_m 取值与文献[8]中相同. 其他算法用到的参数均选择参考文献中的最优设置值, 具体设置如表1所示.

表1 算法参数设置

Table 1 The parameter setting for algorithms				
参数	HS	SGHS	NGHS	IGHS
HMS	5	5	5	5
J	60 000	60 000	60 000	60 000
HMCR	0.95	0.95	-	0.9
PAR	0.33	-	-	-
PARm	-	0.3	-	-
bw_{\min}	-	0.000 5	-	-
bw_{\max}	-	$(\mathbf{x}_i^U - \mathbf{x}_i^L)/10$	-	-
p_m	-	-	0.005	0.005

实验中变量空间取 30 维, 每种算法独立运行 30 次, 分别用 B 代表最优值, M 代表平均值, W 代表最差值, S 代表方差, 测试结果如表 2 所示.

表 2 测试结果
Table 2 The test results

函数	指标	HS	SGHS	NGHS	IGHS
f_1	B	1.11e-01	6.12e-10	4.95e-18	2.06e-29
	W	1.16e+00	4.39e-03	2.70e-15	2.34e-27
	M	5.84e-01	1.85e-04	2.93e-16	9.04e-28
	S	3.02e-01	8.21e-04	5.24e-16	7.47e-28
f_2	B	2.20e+02	1.95e+01	1.55e-01	2.45e01
	W	1.01e+04	5.51e+03	6.81e+03	2.50e01
	M	1.09e+03	5.06e+02	8.72e+02	2.48e01
	S	2.07e+03	1.35e+03	2.07e+3	1.52e-1
f_3	B	1.98e-04	6.42e-08	1.78e-15	0
	W	9.95e-01	9.95e-01	3.49e-11	0
	M	1.34e-01	1.66e-01	1.30e-12	0
	S	3.44e-01	3.77e-01	6.35e-12	0
f_4	B	5.23e-01	6.05e-03	2.22e-16	0
	W	1.01e+00	1.47e-01	2.27e-01	1.23e-2
	M	8.00e-01	5.85e-02	6.62e-02	2.21e-3
	S	1.39e-01	3.94e-02	5.66e-02	4.71e-3
f_5	B	8.49e-04	1.53e-05	1.21e-09	0
	W	2.18e-01	4.64e-05	3.82e-08	1.78e-14
	M	2.43e-02	2.62e-05	5.11e-09	7.82e-15
	S	5.18e-02	6.44e-06	6.64e-9	5.24e-15

注: 黑体字代表算法优化得到的最好值.

由表 2 中的数据可以看出, IGHS 算法对 f_1 , f_3 , f_4 和 f_5 几个函数优化得到的最优值、最差值、平均值和方差都优于其他几种算法的结果, 而且 IGHS 算法对函数 f_3 , f_4 和 f_5 都可以得到最优解. 虽然 IGHS 算法对于函数 f_2 得到最优值稍差于 NGHS 算法, 但所得到的最差值、平均值和方差都优于 NGHS 和其他几种算法. 根据表 2 的测试结果可知, 在引入新的位置更新策略后, IGHS 算法的寻优效果得到了提升.

2 鲁棒极点配置问题

2.1 极点配置

考虑线性时不变系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

其中: 状态变量 $x \in \mathbf{R}^n$; 控制输入 $u \in \mathbf{R}^m$; 系统矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$; 控制输入矩阵 $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$. 假设系统是可控和完全可观测的, 取状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) + r. \quad (6)$$

其中: $K \in \mathbf{R}^{n \times m}$; $r \in \mathbf{R}^m$. 将式(6)代入式(5)中,

则得闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Br, \quad x(0) = x_0. \quad (7)$$

如果矩阵 $A + BK$ 的极点(特征值)都具有负实部, 则闭环系统(7)渐近稳定.

对于系统(5)和任意给定极点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的极点配置问题, 可转化为构造非奇异矩阵 $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和状态反馈增益矩阵 $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 使下式成立:

$$(A + BK)V = VA. \quad (8)$$

其中, $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是由期望极点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 构成的对角阵或伪对角阵.

由文献[1, 10]可知, 对于给定的 A , 如果存在非奇异矩阵 V 和 K 满足式(8), 对矩阵 B 进行 QR 分解, 可有式(9)和式(10)成立:

$$B = [U_0 \quad U_1] \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$U_1^T(AV - VA) = 0. \quad (10)$$

其中: $U_0 \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $U_1 \in \mathbf{R}^{n \times (n-m)}$, 且 $[U_0 \quad U_1]$ 是正交矩阵; $Z \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 是非奇异上三角矩阵.

由于系统(5)假设是完全可控的, 根据式(10)可知, 对于每一个极点 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 及其对应的特征向量 v_i 满足:

$$U_1^T(A - \lambda_i I)v_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

则由式(11)确定的特征向量 v_1, v_2, \dots, v_n 构成特征向量矩阵 V , 可以得到状态反馈增益矩阵:

$$K = Z^{-1}U_0^T(VAV^{-1} - A). \quad (12)$$

2.2 鲁棒极点配置

在极点配置时, 由式(12)可知, 对于给定极点, 选取不同的特征向量矩阵 V , 则对应不同的状态反馈增益矩阵 K . 当闭环系统存在摄动 Δ 时, 如何选取矩阵 K 使摄动后的系统矩阵 $A + \Delta + BK$ 仍然保持稳定, 则称为鲁棒极点配置问题.

针对鲁棒极点配置问题, 文献[1]提出极小化特征向量矩阵条件数 $k_2(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2$ 的方法, 实现鲁棒极点配置. 由文献[1]可知, 假设闭环系统 $A + BK$ 稳定, 如果摄动 Δ 的谱范数满足:

$$\|\Delta\|_2 < \frac{\min_{1 \leq j \leq n} |\text{Re}(\lambda_j)|}{k_2(V)}. \quad (13)$$

其中, $\text{Re}(\lambda_j)$ 表示系统极点的实部, 则摄动后的系统矩阵 $A + \Delta + BK$ 仍能保持稳定. 若条件数 $k_2(V)$ 越小, 则系统允许摄动的范围越大, 从而系统的鲁棒性能就越好. 因此鲁棒极点配置问题, 转化为下面的优化问题:

$$\left. \begin{aligned} \min k_2(V) &= \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2, \\ \text{s. t. } \det(V) &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3 基于 IGHS 的鲁棒极点配置

本文利用 IGHS 算法解决鲁棒极点配置问题,此方法具有两大优势:一是在求解条件数时不需要进行拟凸转化;二是利用性能优良的启发式优化算法寻优.

鲁棒极点配置的具体操作步骤如下:

步骤 1 对控制矩阵 B 根据式(9)做 QR 分解,确定 U_0, U_1 和 Z ;

步骤 2 求解式(11),确定 λ_i 对应的基础解系,由基础解系生成标准正交基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)_{(i=1,2,\dots,n)}$;

步骤 3 初始化参数 HMS, J , HMCR, p_m 和 $[x_j^L, x_j^U]$;

步骤 4 依据 IGHS 算法优化求解 $\min k_2(V)$;

步骤 5 根据步骤 4 中 $\min k_2(V)$ 对应的特征向量矩阵 V ,确定状态反馈增益矩阵 K .

4 实验仿真

实验 1

将本文方法与 Method1 法^[1], Newton 法^[2], LMI 法^[3] 和 RNN 法^[5] 对比实验. 优化对象为文献[1,5]中采用的化学反应模型,其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1.3800 & -0.2077 & 6.7150 & -5.6760 \\ -0.5814 & -4.2900 & 0.0000 & 0.6750 \\ 1.0670 & 4.2730 & -6.6540 & 5.8930 \\ 0.0480 & 4.2730 & 1.3430 & -2.1040 \end{bmatrix},$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 5.679 & 1.136 & 1.136 \\ 0 & 0 & -3.146 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

系统的极点为 $1.911, 6.351 \times 10^{-2}, -5.057, -8.666$,显然系统是不稳定的.为了使系统稳定,需要通过反馈进行极点配置.为方便对比,取期望极点为 $(-0.2, -0.5, -5.0566, -0.232)$,与文献[5]中相同.

实验中 $[x_j^L, x_j^U]$ 在 $(-R, R)$ 上任意取,IGHS 算法中参数与前文相同,迭代 5 000 次,独立运行 30 次.得到的最优结果为条件数等于 3.158 8,对应的状态反馈增益矩阵 K_1 为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.18508 & -0.13374 & 0.26416 & -0.24245 \\ 1.0625 & -0.23699 & 0.64198 & -0.13191 \end{bmatrix}.$$

仿真对比实验结果,具体如表 3 所示.

通过表 3 可以看出,采用本文方法得到的条件数最小,明显优于 Method1, Newton 和 LMI 方

法的结果,虽然略优 RNN 方法的结果,但不需要对条件数进行拟凸转化,而且所得反馈矩阵的范数较小.

表 3 对比实验结果

Table 3 Comparisons of simulation results

指标	Method1	Newton	LMI	RNN	本文
$k_2(V)$	3.320 0	3.350 0	3.266 5	3.160 0	3.158 8
$\ K\ _2$	1.396 2	1.460 0	-	1.323 5	1.316 7
$\ K\ _F$	1.400 3	-	-	1.344 8	1.339 9

实验 2

在实验 1 中,文献[5]得到的条件数值与本文采用 IGHS 算法得到的结果最为接近.为了进一步检测本文方法的有效性,下面进行相应两个闭环系统的鲁棒性能对比测试.

文献[5]所得到的状态反馈增益矩阵 K_2 为

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.181 & -0.125 & 0.257 & -0.232 \\ 1.069 & -0.216 & 0.659 & -0.129 \end{bmatrix}.$$

假设系统的初始状态为 $x_0 = [1, 3, 3, 4]^T$,选取状态反馈 K_1x 和 K_2x ,在系统矩阵 A 无摄动,有摄动 $\Delta_1 = -0.01A$ 和 $\Delta_2 = 0.01A^T$ 三种情况下,系统的零输入状态响应分别如图 1 和图 2 所示.

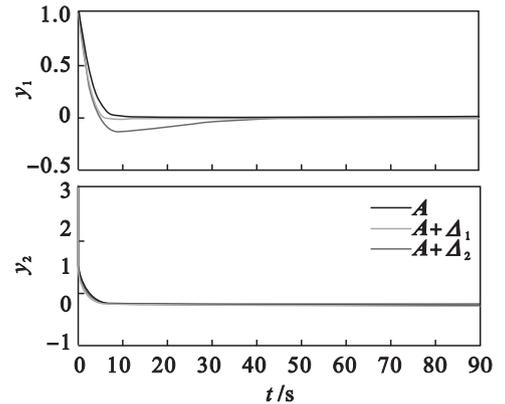


图 1 本文方法对应的零输入状态响应
Fig. 1 Response to initial conditions in this paper

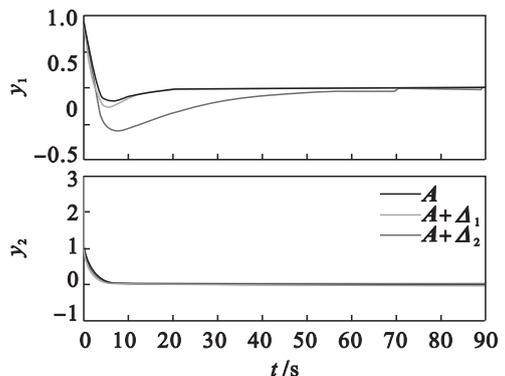


图 2 文献[5]方法对应的零输入状态响应
Fig. 2 Response to initial conditions in literature [5]

通过图 1 和图 2 可以看出,文献[5]中所得到的闭环系统的零输入响应抖动较大,收敛速度较慢;本文所得到的闭环系统的零输入响应抖动较小,而且收敛速度相对较快,具有更好的鲁棒性.

5 结 语

本文针对 NGHS 算法因位置更新操作导致过早收敛,容易陷入局部最优的问题,给出了新的位置更新策略,提出的 IGHS 算法增强了算法开发解空间局部信息的能力,避免了算法因收敛过快而陷入局部最优的不足.

将所提出算法应用于线性系统鲁棒极点配置问题中,解决了以往条件数优化计算中需要凸转化处理的不足.仿真实验表明,利用本文方法所得到的条件数明显优于 Method1, Newton 和 LMI 方法.从条件数值和反馈增益矩阵的范数来看,本文方法也略优于 RNN 方法,同时反馈后的闭环系统具有更好的鲁棒性.

参考文献:

- [1] Kautsky J, Nichols N K, Van Dooren P. Robust pole assignment in linear state feedback[J]. *International Journal of Control*, 1985, 41(5): 1129 - 1155.
- [2] Byers R, Nash S G. Approaches to robust pole assignment

[J]. *International Journal of Control*, 1989, 49(1): 97 - 117.

- [3] Rami A M, El Faiz S, Benzaouia A, et al. Robust exact pole placement via an LMI-based algorithm [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 394 - 398.
- [4] Le X, Wang J. Robust pole assignment for synthesizing feedback control systems using recurrent neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(2): 383 - 393.
- [5] Geem Z W, Kim J H, Loganathan G V. A new heuristic optimization algorithm: harmony search [J]. *Simulation*, 2001, 76(2): 60 - 68.
- [6] Pan Q K, Suganthan P N, Tasgetiren M F, et al. A self-adaptive global best harmony search algorithm for continuous optimization problems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 216(3): 830 - 848.
- [7] Zou D, Gao L, Wu J, et al. Novel global harmony search algorithm for unconstrained problems[J]. *Neurocomputing*, 2010, 73(16): 3308 - 3318.
- [8] Shreem S S, Abdullah S, Nazri M Z A. Hybridising harmony search with a Markov blanket for gene selection problems [J]. *Information Sciences*, 2014, 258: 108 - 121.
- [9] Jeddi B, Vahidinasab V. A modified harmony search method for environmental/economic load dispatch of real-world power systems [J]. *Energy Conversion and Management*, 2014, 78: 661 - 675.
- [10] Jiang D, Wang J. Augmented gradient flows for on-line robust pole assignment via state and output feedback [J]. *Automatica*, 2002, 38(2): 279 - 286.

(上接第 321 页)

参考文献:

- [1] 张化光, 张欣, 罗艳红, 等. 自适应动态规划综述[J]. *自动化学报*, 2013, 39(4): 303 - 311.
(Zhang Hua-guang, Zhang Xin, Luo Yan-hong, et al. An overview of research on adaptive dynamic programming[J]. *ACTA Automatica Sinica*, 2013, 39(4): 303 - 311.)
- [2] 刘德荣, 李宏亮, 王鼎. 基于数据的自学习优化控制: 研究进展与展望[J]. *自动化学报*, 2013, 39(11): 1858 - 1870.
(Liu De-rong, Li Hong-liang, Wang Ding. Data-based self-learning optimal control: research progress and prospects[J]. *ACTA Automatica Sinica*, 2013, 39(11): 1858 - 1870.)
- [3] Vamvoudakis K G, Lewis F L. Multi-player non-zero-sum games; online adaptive learning solution of coupled Hamilton-Jacobi equations[J]. *Automatica*, 2011, 47(8): 1556 - 1569.
- [4] Abu-Khalaf M, Lewis F L, Jie H. Neurodynamic programming and zero-sum games for constrained control systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, 19(7): 1243 - 1252.
- [5] Al-Tamimi A, Abu-Khalaf M, Lewis F L. Adaptive critic designs for discrete-time zero-sum games with application to H infinity control[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2007, 37(1): 240 - 247.

- [6] Zhang H, Wei Q, Liu D. An iterative adaptive dynamic programming method for solving a class of nonlinear zero-sum differential games[J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 207 - 214.
- [7] Vrabie D, Lewis F. Integral reinforcement learning for online computation of feedback Nash strategies of nonzero-sum differential games [C]// 2010 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Atlanta, 2010: 3066 - 3071.
- [8] Zhang H G, Cui L L, Luo Y H. Near-optimal control for nonzero-sum differential games of continuous-time nonlinear systems using single-network ADP[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, 43(1): 206 - 216.
- [9] Jiang Y, Jiang Z P. Computational adaptive optimal control for continuous-time linear systems with completely unknown dynamics[J]. *Automatica*, 2012, 48(10): 2699 - 2704.
- [10] Li H, Liu D, Wang D. Integral policy iteration for zero-sum games with completely unknown nonlinear dynamics [C]// Neural Information Processing, 20th International Conference, ICONIP 2013. Berlin Heidelberg: Springer, 2013: 225 - 232.
- [11] Gajic Z, Li T Y. Simulation results for two new algorithms for solving coupled algebraic Riccati equations [C]// The Third International Symposium on Differential Games. Nice, 1988.