

# 多轴段转子系统的畸变试验模型动力学相似设计

罗 忠, 时海丽, 陈晓兵, 于清文  
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 基于 Riccati 传递矩阵法和灵敏度分析, 提出了一种多轴段转子-支承系统畸变试验模型的动力学相似设计方法. 分析了转子固有特性的系统参数灵敏度, 对原型系统进行动力学模化得到畸变模型, 并进行必要的模型修正, 然后对修正后的畸变模型进行缩尺设计得到最终试验模型. 以设计某空压机高压转子的缩尺试验模型为例, 通过对比原型和所设计缩尺试验模型的临界转速和固有特性, 验证了所提试验模型动力学相似设计方法的有效性和实用性.

**关 键 词:** 多轴段转子; 试验模型; 畸变; 动力学相似; 设计

**中图分类号:** TH 113      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2015)04-0542-05

## Dynamic Similarity Design Method of Distortion Experimental Model for Multiaxial Rotor System

LUO Zhong, SHI Hai-li, CHEN Xiao-bing, YU Qing-wen

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.  
Corresponding author: SHI Hai-li, E-mail: 421666182@qq.com)

**Abstract:** A dynamics similarity design method of distortion experimental model for multiaxial rotor-bearing system was proposed on the basis of the Riccati transfer matrix method and the critical speed sensitivity of system parameters. The prototype system spindle was simplified into distortion model upon the sensitivity, then the distortion model was revised and designed into dynamics similarity scaled model. Taking air compressor high-pressure rotor as an example, the critical speed and the inherent characteristics were calculated upon the Riccati transfer matrix method. By comparing the characteristics of the prototype with that of the scaled model, the validity and practicability of the proposed method were verified.

**Key words:** multiaxial rotor; experimental model; distortion; dynamics similarity; design

多轴段转子-支承系统是航空发动机、汽轮机和在水轮机等大型旋转机械的重要组成部分,其动力学特性决定着旋转机械的工作性能和结构安全. 由于转子系统受转速、离心力、离心弯矩、恢复扭矩载荷、支承刚度、陀螺力矩和尺寸效应等众多复杂因素影响,其动力学问题仅靠理论上的解析和数值模拟不能准确地解决,必须结合物理试验研究<sup>[1-3]</sup>. 然而,若直接对原型系统进行完全几何相似缩尺设计,不仅会加大模型试验台设计及加工的难度,增加试验成本,甚至会由于个别轴段过细或转盘过薄,给模型试验测试引入不确定因素

(如转盘过薄引起颤振). 此外,对于有些复杂转子系统固有特性的试验研究,只需通过简单的试验模型能够模拟再现或预测出原型的固有特性即可,但实现这一目标的前提是试验模型与原型系统必须动力学相似. 因此,对复杂转子系统进行畸变试验模型的动力学相似设计方法研究非常重要.

针对转子系统的动力学相似问题研究的文献相对较少. 胡培民<sup>[4]</sup>对转子系统的相似模型建立进行了分析,分别对转子的弯曲和扭转振动响应作了研究,并且分析了刚性支承在转子弯曲振动

收稿日期: 2014-02-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51105064); 国家重点基础研究发展计划项目(2012CB026000); 辽宁省自然科学基金资助项目(201202056).

作者简介: 罗 忠(1978-),男,内蒙古集宁人,东北大学副教授,博士

中的相似规律. Wu<sup>[5]</sup>研究了在低转速情况下,利用完全相似的转子系统试验模型预测原型系统横向振动特性的方法,并基于有限元法,对单盘和多盘转子系统进行了数值模拟和确认,准确预测出了转子系统的固有频率和转子径向位移响应,为该类问题的研究奠定了一定的理论基础.但在工程实际中,建立完全相似的模型试验系统非常困难,几乎是不可能的. Mohiuddin 等<sup>[6]</sup>将平衡模型降阶技术应用到复杂转子-轴承系统中,对转子系统转轴、盘和轴承单元分别建立了有限元模型,并将平衡模型降阶方程带入模型有限元方程中得到简化后的转子-轴承模型,该方法适用于阻尼很小的转子轴承系统. Young<sup>[7]</sup>针对自适应复合材料船用发动机转子建立了动力学相似性关系,重点研究了对于影响转子和水流之间相互作用的结构参数及流体参数相似关系的建立方法,建立了转子叶片的实体模型和相似模型.

综合国内外学者研究现状,本文基于 Riccati 传递矩阵法和参数灵敏度分析,提出一种多轴段转子-支承系统畸变试验模型动力学相似设计方法,并通过具体算例验证所提方法的可行性.

## 1 模型建立

转子-支承系统主要由转轴、转盘及支承三部分组成,多轴段模型结构示意图如图1所示,图中I、II处为省略的轴盘结构.建立坐标系  $oxy$ ,其中,坐标原点  $o$  为转子-支承系统转轴左端面中心点, $x$ 轴为转轴中心轴线, $z$ 轴为水平方向, $y$ 轴垂直于  $oxz$ 平面且竖直向上为正方向.设  $l_j$  为第  $j$  个轴段长度; $d_j$  为第  $j$  个轴段内径; $D_j$  为第  $j$  个轴段外径; $\phi_j$  为第  $j$  个圆盘外径,其内径为  $D_j$ ;  $h_j$  为第  $j$  个圆盘厚度;设转轴及转盘材料弹性模量为  $E$ ,密度为  $\rho$ ;第  $k$  个支承的支承刚度为  $k_k$ .

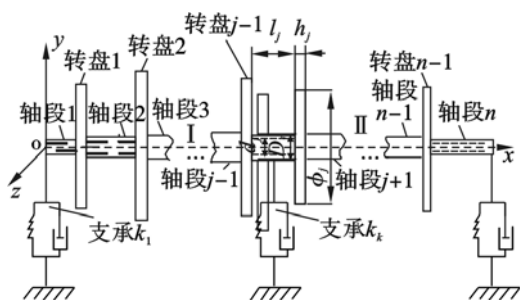


图1 多轴段转子-支承系统模型

Fig. 1 Multiaxial rotor-bearing system model

## 2 畸变模型相似设计

动力学相似试验模型的设计可通过以下步骤进行:①首先依据设计条件和灵敏度分析进行试验模型的简化设计,即动力学模化;②在此基础上进行必要的模型修正;③对修正后的畸变模型根据动力学相似关系进行缩尺设计得到最终试验模型.

### 2.1 动力学模化

转子-支承系统的临界转速与各参数有关,即转子-支承系统各参数的微小变化都将不同程度引起某一阶临界转速的变化.因此动力学模化前后系统各参数的微小变化必将不同程度引起前任意阶固有特性的变化.为简化说明,本文多轴段转子-支承系统动力学模化的基本思想:保证动力学模化前后前两阶临界转速一致(同样适用于使试验模型的临界转速增大或降低的设计方法).因轴段的转动惯量与圆盘相比可忽略不计,故可将轴段集总为两端相同质量点及弹性无质量轴,圆盘简化为无厚度薄圆盘.

设所设计畸变模型各段转轴的内外径均相等,转轴的内外径分别为  $d'$  和  $D'$ ,转盘的内外径与转轴的外径相等,即等于  $D'$ ,则动力学模化前后系统第  $j$  个节点质量的变化  $\Delta m_j$  及第  $j$  个轴段抗弯刚度的变化  $\Delta(EI)_j$  必将引起前两阶临界转速的变化,其临界转速的变化值  $\Delta N_i (i=1,2)$  为

$$\Delta N_i = \sum_{j=1}^n (\Delta(EI)_j \frac{\partial N_i}{\partial(EI)_j}) + \sum_{j=1}^{n+1} (\Delta m_j \frac{\partial N_i}{\partial m_j}). \quad (1)$$

式中: $\Delta(EI)_j$  为动力学模化前后第  $j$  个轴段抗弯刚度的变化值; $\partial N_i / \partial(EI)_j$  为第  $i$  阶临界转速  $N_i$  对第  $j$  个轴段抗弯刚度  $(EI)_j$  的敏感度; $\Delta m_j$  为动力学模化前后第  $j$  个节点质量的变化值; $\partial N_i / \partial m_j$  为第  $i$  阶临界转速  $N_i$  对第  $j$  个节点质量  $m_j$  的敏感度; $n$  为轴段个数.  $\partial N_i / \partial(EI)_j$  和  $\partial N_i / \partial m_j$  可分别由式(2)、式(3)求得<sup>[8]</sup>:

$$\frac{\partial N_i}{\partial(EI)_j} = \frac{1800}{\pi^2 N_i l_j^3} [3(\bar{y}_j - \bar{y}_{j+1})^2 + 3l_j(\bar{y}_j - \bar{y}_{j+1}) \times (\bar{\theta}_j + \bar{\theta}_{j+1}) + l_j^2(\bar{\theta}_j^2 + \bar{\theta}_j \bar{\theta}_{j+1} + \bar{\theta}_{j+1}^2)] \quad (j=1,2,\dots,n), \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial m_j} = -\frac{N_i}{2} \bar{y}_j^2 \quad (j=1,2,\dots,n+1). \quad (3)$$

式中: $\bar{y}_j, \bar{y}_{j+1}, \bar{\theta}_j$  和  $\bar{\theta}_{j+1}$  分别表示在第  $i$  阶主振型中,第  $j$  个轴段左右两端结点处的正则化线位移及角位移幅值.  $\bar{y}_j$  和  $\bar{\theta}_j$  可由式(4)、式(5)求得<sup>[8]</sup>:

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{A}; \bar{\theta}_j = \frac{\theta_j}{A} \quad (j=1, 2, \dots, n+1), \quad (4)$$

$$A = \sqrt{\sum_{j=1}^n [m_j y_j^2 + (J_{dj} - J_{pj}) \theta_j^2]}, \quad (5)$$

$$j=1, 2, \dots, n+1.$$

式中:  $y_j, \theta_j$  分别表示在第  $i$  阶主振型中, 第  $j$  个轴段左端节点处未经正则化的线位移及角位移相对幅值;  $J_{dj}, J_{pj}$  分别为第  $j$  个节点的直径转动惯量和极转动惯量。

构建系统前两阶临界转速相对误差的平方和函数:

$$f_{\min}(d', D') = (\Delta N_1/N_1)^2 + (\Delta N_2/N_2)^2, \quad (6)$$

$$0 \leq d' < D'.$$

根据式(6), 基于 Matlab 数学求解函数库中的最优化求解方法, 求出最优解  $d', D'$ 。

## 2.2 模型修正

由于式(2)、式(3)均是在对原系统方程求导, 且在略去了二阶以上微量条件下得出的, 因此只有在参数变化微小情况下才是准确的, 故必须对上述求得的畸变模型的  $d', D'$  进行修正。

设修正后畸变模型的两个参数为  $d'', D''$ , 假设系统前两阶临界转速的改变量为  $\{\Delta N\} = [\Delta N_1', \Delta N_2']^T$ , 需调整参数的修改量为

$$\{\Delta p\} = [\Delta m_1', \Delta m_2', \dots, \Delta m_{n+1}', \Delta EI_1', \Delta EI_2', \dots, \Delta EI_n']^T, \text{ 则有}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1'}{\partial m_1'} & \dots & \frac{\partial N_1'}{\partial m_{n+1}'} & \frac{\partial N_1'}{\partial EI_1'} & \dots & \frac{\partial N_1'}{\partial EI_n'} \\ \frac{\partial N_2'}{\partial m_1'} & \dots & \frac{\partial N_2'}{\partial m_{n+1}'} & \frac{\partial N_2'}{\partial EI_1'} & \dots & \frac{\partial N_2'}{\partial EI_n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta m_1' \\ \vdots \\ \Delta m_{n+1}' \\ \Delta EI_1' \\ \vdots \\ \Delta EI_n' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta N_1' \\ \Delta N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta N_1' \\ \Delta N_2' \end{bmatrix}. \quad (7)$$

式中:  $\Delta N_i' = N_i' - N_i$  ( $i=1, 2$ ) 为畸变模型第  $i$  阶临界转速与原型第  $i$  阶临界转速的差值;  $\partial N_i' / \partial m_j$  ( $i=1, 2; j=1, 2, \dots, n+1$ ) 为畸变模型第  $i$  阶临界转速对第  $j$  个节点质量的敏感度;  $\partial N_i' / \partial EI_j$  ( $i=1, 2; j=1, 2, \dots, n$ ) 为畸变模型第  $i$  阶临界转速对第  $j$  个轴段抗弯刚度的敏感度。因此, 修正后的畸变模型的节点质量  $m_j''$  及轴段抗弯刚度  $EI_j''$  为

$$\begin{cases} m_j'' = m_j' + \Delta m_j' & (j=1, 2, \dots, n+1), \\ EI_j'' = EI_j' + \Delta EI_j' & (j=1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (8)$$

根据式(7)和式(8), 基于 Matlab 多项式型方程的准解析解法, 求出  $d''$  和  $D''$ 。然后根据结点

质量及转动惯量不变的原则, 计算出修正后的畸变模型转盘的外径及厚度。最后根据 Riccati 传递矩阵法计算修正后的畸变模型的临界转速和固有特性, 判断是否能保证前两阶临界转速相对误差小于等于给定范围(如 5%)。若不满足, 按上述方法继续修正, 直到满足要求为止。

## 2.3 动力学相似设计

对于多轴段转子-支承系统, 经上述动力学模化及模型修正后, 欲研究原型转子-支承系统动力学特性, 则缩尺模型的建立尤为必要, 缩尺设计的基本理论依据为<sup>[9]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \lambda_m &= \lambda_\rho \lambda_d^2 \lambda_l, \\ \lambda_\omega &= \lambda_E^{1/2} \lambda_\rho^{-1/2} \lambda_d \lambda_l^{-2}, \\ \lambda_{J_p} &= \lambda_\rho \lambda_d^2 \lambda_l^3, \\ \lambda_k &= \lambda_E \lambda_d^4 \lambda_l^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中:  $\lambda_i$  为参数  $i$  的相似比,  $i=m, \omega, J_p, k$  分别为结点质量、系统固有频率、结点极转动惯量和支承刚度。

## 3 工程算例

设某空压机高压转子如图 2 所示<sup>[10]</sup>, 转子模型的数据如表 1、表 2 所示。转子材料的弹性模量

表 1 高压转子模型数据表  
Table 1 Data sheet of high-pressure rotor model

结点	轴段长度/m	刚度外径/m	质量外径/m
1	0.023	0.024	0.026
2	0.029	0.050	0.050
3	0.037	0.050	0.050
4	0.038	0.050	0.063
5	0.039	0.050	0.063
6	0.038	0.050	0.063
7	0.045	0.055	0.074
8	0.046	0.060	0.060
9	0.031	0.060	0.060
10	0.040	0.075	0.154
11	0.006	0.090	0.090
12	0.053	0.100	0.107
13	0.053	0.100	0.107
14	0.006	0.090	0.090
15	0.040	0.075	0.154
16	0.031	0.060	0.060
17	0.046	0.060	0.060
18	0.045	0.055	0.074
19	0.038	0.050	0.063
20	0.039	0.050	0.063
21	0.038	0.050	0.063
22	0.035	0.050	0.050
23	0.032	0.050	0.050
24	0.023	0.024	0.026
25	0.000	-	-

$E = 206.0 \text{ GPa}$ , 密度为  $7\,850 \text{ kg/m}^3$ , 支承在结点 9 和 17 处, 支承刚度均为  $22 \text{ MN/m}$ . 根据本文提出的多轴段转子-支承系统畸变模型动力学相似设计方法, 首先对原型系统进行动力学模化得到畸变模型. 然后修正, 最后根据式 (9), 令  $\lambda_\omega = \lambda_E^{1/2} \lambda_\rho^{-1/2} \lambda_d \lambda_l^{-2} = 1$ , 采取相似比:  $\lambda_d = 1/2$ ,  $\lambda_l = \sqrt{2}/2$ ,  $\lambda_k = \sqrt{2}/8$ , 设计缩尺模型, 则其缩尺模型尺

寸参数如表 3 所示, 在结点 9 和 17 处缩尺模型支承刚度均为  $3.9 \times 10^6 \text{ N/m}$ . 因结点 1 和 25 处附加转动惯量及附加质量很小, 故忽略, 因此结点 1 和 25 无转盘. 采用 Riccati 传递矩阵法分别计算原型及缩尺模型的临界转速, 其临界转速对比值如表 4 所示, 振型图如表 5 所示.

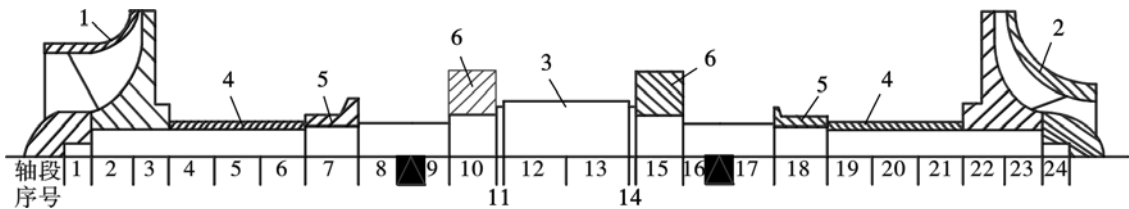


图 2 某空压机高压转子的模型  
Fig. 2 Air compressor high-pressure rotor model

1—I 级叶轮; 2—II 级叶轮; 3—小齿轮; 4—密封套; 5—甩油盘; 6—推力盘.

表 2 高压转子模型数据表 Table 2 Data sheet of high-pressure rotor model			
结点	附加直径转动惯量/( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )	附加极转动惯量/( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )	附加质量/kg
1	0.000 3	0.000 4	0.804
3	0.079 0	0.134 4	15.793
23	0.069 4	0.118 5	15.396
25	0.000 3	0.000 4	0.776

表 3 缩尺模型参数 Table 3 Scaled model dimension parameters mm	
参数	值
转轴内径	10.0
转轴外径	31.0
转轴长度	602.0
转盘 1 内径	31.0
转盘 1 外径	178.0
转盘 1 厚度	15.0
转盘 2 内径	31.0
转盘 2 外径	169.0
转盘 2 厚度	17.0

表 4 原型及缩尺模型临界转速对比 Table 4 Comparison of critical speeds for prototype and scaled model				
转速/( $\text{r} \cdot \text{min}^{-1}$ )	一反	一正	二反	二正
原型	3 058	3 282	5 622	6 029
缩尺模型	3 158	3 342	5 656	6 009
相对误差/%	3.27	1.83	0.60	0.33

表 5 前两阶振型对比 Table 5 Comparison of first two order vibration model		
阶数	原型	缩尺模型
一阶		
二阶		

由表 4 及表 5 可以看出, 转子-支承系统缩尺模型已很好再现原型前两阶固有特性.

4 结 论

- 1) 基于 Riccati 传递矩阵法和灵敏度分析提出了一种多轴段转子-支承系统畸变试验模型的动力学相似设计方法.
- 2) 以设计某空压机高压转子的缩尺试验模型为例, 给出具体缩尺试验模型的设计步骤和方法, 进一步确认了设计方法的有效性和实用性.
- 3) 为简化说明, 本文以保证动力学模化前后前两阶的临界转速一致为例加以说明, 实际上该方法对于保证更多阶次临界转速和更多固有特性 (包括振型) 参数一致或成比例的设计都有实际指导意义, 只是畸变模型待求转轴参数亦相应增加.

参考文献:

[1] 闻邦椿, 武新华, 丁千, 等. 故障旋转机械非线性动力学的理论与试验[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 1-3.  
(Wen Bang-chun, Wu Xin-hua, Ding Qian, et al. Theory and experiment of faults of rotating machinery nonlinear dynamics [M]. Beijing: Sciences Press, 2014: 1-3.)