第36卷第4期　　东北大学学报（自然科学版）　　Vol.36,No.4
2015年4月　　Journal of Northeastern University(Natural Science)　　Apr.　2015

doi：10.3969/j.issn.1005-3026.2015.04.001

离散Markovian跳变系统概率转移矩阵部分未知的可靠控制

王建华，张庆灵，逄　博
（东北大学 理学院，辽宁 沈阳　110819）

摘　　要：针对执行器故障和概率转移矩阵部分未知的情况，研究了一类离散Markovian跳变系统的可靠控制问题.设计有效的状态反馈可靠控制器，不仅使得闭环系统在无故障的情况下是随机稳定的，而且在执行器出现故障的情况下还仍然使得闭环系统是随机稳定的.用一组耦合可解的线性矩阵不等式给出了可靠控制器的可行性条件.数值算例表明了所提方法的可行性和有效性.

关　键　词：Markovian跳变系统；可靠控制；执行器故障；概率转移矩阵部分未知；线性矩阵不等式

中图分类号：TP 13　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-3026(2015)04-0457-05

Reliable Control for Discrete-Time Markovian Jump Systems with Partly Unknown Transition Probabilities

WANG Jian-hua, *ZHANG Qing-ling*, *PANG Bo*
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: WANG Jian-hua, E-mail: jianhua19830209@163.com)

Abstract: Due to the actuator failures and partly unknown transition probabilities, reliable control problem was studied for a class of discrete linear Markovian jump systems. A reliable controller based on the state feedback method was designed to make the closed-loop systems randomly stable not only when all actuators are operational, but also in case of some actuator failures. The solvability condition of controllers could be equivalent to a feasibility problem of coupled linear matrix inequalities (LMIs). A numerical example demonstrated the feasibility and effectiveness of the proposed design.

Key words: Markovian jump systems; reliable control; actuator failure; partly unknown transition probabilities; linear matrix inequality (LMI)

可靠控制是将系统部件(执行器和传感器)可能发生的故障考虑在控制器设计过程中，设计可靠控制器可使闭环系统无论部件是否出现故障都能保持渐近稳定性且满足一定的性能指标[1-3].

自从Markovian跳变系统作为一类特殊的混杂系统被提出以来，就成为广大学者研究的热点之一.Markovian跳变系统的各个子系统按照一定的Markovian规则进行切换，并且取得了很多有意义的成果[4-14]，其中文献[4-8]考虑的是Markovian跳变系统转移概率全部已知的情况.事实上，Markovian跳变系统的转移概率很难精确得到，仅仅得到其估计值或者部分概率[9-14].文献[9]研究的就是Markovian跳变系统转移概率部分未知的情况下系统的稳定性和镇定性问题.Markovian跳变系统转移概率部分未知的问题研究成为近年来学术界研究的热点问题.

本文针对执行器故障和概率转移矩阵部分未知的情况，研究了离散Markovian跳变系统的可靠控制问题.目的是设计一个状态反馈可靠控制器，不仅使得闭环系统在无故障的时候是随机稳定的，而且在执行器出现故障的时候还能使得闭环系统是随机稳定的.

收稿日期：2014-04-23
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61273008,61304054)；辽宁省教育厅科学技术研究项目(L2013051).
作者简介：王建华(1982-)，男，山东莒县人，东北大学博士研究生；张庆灵(1956-)，男，辽宁营口人，东北大学教授，博士生导师.

1 问题描述

给定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$,考虑如下一类离散的Markovian跳变系统:

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(r_k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(r_k)\boldsymbol{u}(k). \quad (1)$$

式中:$\boldsymbol{x}(k)\in\mathbf{R}^n$为状态变量;$\boldsymbol{u}(k)\in\mathbf{R}^m$是输入;$\{r(k)\}$为一Markovian过程并且在有限集合$l=\{1,2,\cdots,N\}$内取值. $\boldsymbol{\pi}=[\pi_{ij}]_{N\times N}$是概率转移矩阵,$\pi_{ij}\geqslant 0$的定义为

$$\pi_{ij}=\Pr\{r(k+1)=j|r(k)=i\}.$$

式中:$\sum_{j=1}^{N}\pi_{i,j}=1$,马尔科夫概率转移矩阵$\boldsymbol{\pi}$的定义为

$$\boldsymbol{\pi}=\begin{bmatrix}\pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1N}\\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2N}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \cdots & \pi_{NN}\end{bmatrix}.$$

如果转移矩阵中有部分转移概率不能够得到,此时,转移矩阵中有一些元素是未知的,例如,

$$\boldsymbol{\pi}=\begin{bmatrix}\pi_{11} & ? & \pi_{13} & ?\\ ? & ? & ? & \pi_{24}\\ \pi_{31} & ? & \pi_{33} & ?\\ ? & ? & \pi_{43} & \pi_{44}\end{bmatrix}.$$

其中,“?”代表不能得到的转移概率. 定义$l=l_\kappa^i+l_{\upsilon\kappa}^i$

$$l_\kappa^i\triangleq\{j:\pi_{ij}\text{已知}\},$$
$$l_{\upsilon\kappa}^i\triangleq\{j:\pi_{ij}\text{未知}\}.$$

而且,如果$l_\kappa^i\neq\varnothing$,进一步地表示$l_\kappa^i=(\kappa_1^i,\kappa_2^i,\cdots,\kappa_m^i)$,$\forall 1\leqslant m\leqslant N$,其中$\kappa_m^i\in\mathbf{N}^+$表示转移矩阵中的第$i$行的第$m$个已知元素的下标是$\kappa_m^i$. 并且

$$\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}=1,\ \sum_{j\in l_\kappa^i}^{j=1}\pi_{ij}+\sum_{j\in l_{\upsilon\kappa}^i}^{j=1}\pi_{ij}=1$$

$$\Rightarrow h_i\triangleq\sum_{j\in l_{\upsilon\kappa}^i}^{j=1}\pi_{ij}=1-\sum_{j\in l_\kappa^i}^{j=1}\pi_{ij}.$$

在一些文章中转移概率矩阵一般都是已知的或者完全未知的. 在文献[11]中的转移矩阵是部分未知的,本文转移概率矩阵部分未知所用的方法是文献[11]的形式.

定义1 当$\boldsymbol{u}(k)\equiv 0$时,称系统(1)是随机稳定的,如果

$$E\{\sum_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{x}(k)\|^2|\boldsymbol{x}_0,r_0\}<\infty$$

对任意的初始条件$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$及模态$r_0\in l$成立.

引理1 设$\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$为适维常值矩阵, $\boldsymbol{\Sigma}$为时变适维矩阵, $|\boldsymbol{\Sigma}|\leqslant\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}$为正定对角矩阵, 则

$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\leqslant\beta\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\beta}\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2.$$

式中:$\beta>0$; $\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i)$; $|\boldsymbol{\Sigma}|=\mathrm{diag}(|\sigma_1|,|\sigma_2|,\cdots,|\sigma_i|)$.

引理2 Schur补:对于给定的对称矩阵

$$\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Xi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_{11} & \boldsymbol{\Xi}_{12}\\ \boldsymbol{\Xi}_{21} & \boldsymbol{\Xi}_{22}\end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{\Xi}_{11}$,$\boldsymbol{\Xi}_{22}$是对称矩阵,$\boldsymbol{\Xi}_{12}=\boldsymbol{\Xi}_{21}^{\mathrm{T}}$, 以下3个条件是等价的:

1) $\boldsymbol{\Xi}<0$.

2) $\boldsymbol{\Xi}_{11}<0$,$\boldsymbol{\Xi}_{22}-\boldsymbol{\Xi}_{21}\boldsymbol{\Xi}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Xi}_{12}<0$.

3) $\boldsymbol{\Xi}_{22}<0$,$\boldsymbol{\Xi}_{11}-\boldsymbol{\Xi}_{12}\boldsymbol{\Xi}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Xi}_{21}<0$.

引理3 当$\boldsymbol{u}(t)\equiv 0$时,称系统(1)是随机稳定的,当且仅当存在正定矩阵$\boldsymbol{P}_i$,$i\in l$,使得

$$\boldsymbol{A}_i^T(\sum_{j\in l}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j)\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{P}_i<0.$$

引理4 当$\boldsymbol{u}(t)\equiv 0$时,称转移概率矩阵部分未知的系统(1)是随机稳定的,如果,存在正定矩阵$\boldsymbol{P}_i$,$i\in l$,使得

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\sum_{j\in l_k^i}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j)\boldsymbol{A}_i-(\sum_{j\in l_k^i}^{N}\pi_{ij})\boldsymbol{P}_i<0,$$

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{P}_i<0.$$

2 执行故障的可靠控制

给定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$,考虑如下一类离散的Markovian跳变系统:

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(r_k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(r_k)\boldsymbol{u}^{\mathrm{f}}(k).$$

式中:$\boldsymbol{x}(k)\in\mathbf{R}^n$状态变量; $\boldsymbol{u}^{\mathrm{f}}(k)\in\mathbf{R}^m$是执行器故障输入.

反馈控制律为$\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{K}(r_t)\boldsymbol{x}(k)$. 执行器增益故障模型为

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{f}}(k)=\boldsymbol{M}(r_t)\boldsymbol{u}(k).$$

式中,$\boldsymbol{M}(r_t)$为执行器故障矩阵.

则相应的闭环系统为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}(k). \quad (2)$$

引进如下符号:

$$\boldsymbol{M}_i^0=\mathrm{diag}(m_{01},m_{02},\cdots,m_{0n}),$$

$$\boldsymbol{J}_i=\mathrm{diag}(j_1,j_2,\cdots,j_n),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_i=\mathrm{diag}(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n),m_{0i}=\frac{1}{2}(m_{\mathrm{u}i}+m_{\phi i}),$$

$$j_i=\frac{m_{\mathrm{u}i}-m_{\phi i}}{m_{\mathrm{u}i}+m_{\phi i}},\phi_i=\frac{m_i-m_{0i}}{m_{0i}},(i=1,2,\cdots,n),$$

并且$\boldsymbol{M}_i=\boldsymbol{M}_i^0(\boldsymbol{I}_i+\boldsymbol{\Phi}_i)$,$|\boldsymbol{\Phi}_i|\leqslant\boldsymbol{J}_i\leqslant\boldsymbol{I}_i$.

其中，$|\boldsymbol{\Phi}_i| = \mathrm{diag}(|\phi_1|, |\phi_2|, \cdots, |\phi_n|)$.

定理 1　称转移概率矩阵部分未知的闭环系统(2)是随机稳定的，如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}_i > \boldsymbol{0}$，$i \in l$，使得

$$(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j\in l_k^i}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j\Big)(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i) - \Big(\sum_{j\in l_k^i}^{N}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{P}_i < \boldsymbol{0},$$

$$(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i) - \boldsymbol{P}_i < \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

那么，所设计的随机可靠控制器为 $\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{K}(r_t)\boldsymbol{x}(k)$.

证明　根据闭环系统(2)，用$(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)$代替引理 4 中的 $\boldsymbol{A}_i$ 即可以得到式(3).

定理 2　称转移概率矩阵部分未知的闭环系统(2)是随机稳定的，如果存在标量 $\varepsilon > 0$，$\zeta > 0$ 和矩阵 $\boldsymbol{X}_i > 0$，$\boldsymbol{Y}_i$，$i \in l$，使得

$$\begin{bmatrix}
(-\boldsymbol{X}_{\kappa_1^i} + \varepsilon_i\pi_{i\kappa_1^i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}}) & \varepsilon_i\sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}\sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}} & \cdots & \varepsilon_i\sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}\sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}} & \sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{Y}_i) & \boldsymbol{0} \\
(*) & (-\boldsymbol{X}_{\kappa_2^i} + \varepsilon_i\pi_{i\kappa_1^i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}}) & \cdots & \varepsilon_i\sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}\sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}} & \sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{Y}_i) & \boldsymbol{0} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
(*) & (*) & \cdots & (-\boldsymbol{X}_{\kappa_m^i} + \varepsilon_i\pi_{i\kappa_1^i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}}) & \sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{Y}_i) & \boldsymbol{0} \\
(*) & (*) & \cdots & (*) & -\Big(\sum_{j\in l_k^i}^{N}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{X}_i & \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_i^{\frac{1}{2}} \\
(*) & (*) & \cdots & (*) & (*) & -\varepsilon_i^{-1}\boldsymbol{I}
\end{bmatrix} < \boldsymbol{0},$$

$$\begin{bmatrix}
-\boldsymbol{X}_j + \zeta_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{Y}_i & \boldsymbol{0} \\
(*) & -\boldsymbol{X}_i & \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_i^{\frac{1}{2}} \\
(*) & (*) & -\zeta_i\boldsymbol{I}
\end{bmatrix} < \boldsymbol{0}.$$

那么，所设计的随机可靠控制器为 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{X}_i^{-1}$.

证明　对于定理 1 中的两个不等式利用引理 3 得

$$\begin{bmatrix}
-\boldsymbol{P}_{\kappa_1^i} & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}\boldsymbol{P}_{\kappa_1^i}\boldsymbol{A}_i \\
\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{P}_{\kappa_2^i} & \cdots & \cdots & \sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}\boldsymbol{P}_{\kappa_2^i}\boldsymbol{A}_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{P}_{\kappa_m^i} & \sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}\boldsymbol{P}_{\kappa_m^i}\boldsymbol{A}_i \\
\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}\boldsymbol{P}_{\kappa_1^i} & \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}\boldsymbol{P}_{\kappa_2^i} & \cdots & \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}\boldsymbol{P}_{\kappa_m^i} & -\Big(\sum_{j\in l_k^i}^{N}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{P}_i
\end{bmatrix} < \boldsymbol{0}, \tag{4a}$$

$$\begin{bmatrix}
-\boldsymbol{P}_j & \boldsymbol{P}_j\boldsymbol{A}_i \\
\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j & -\boldsymbol{P}_i
\end{bmatrix} < \boldsymbol{0}. \tag{4b}$$

设　$\boldsymbol{P}_i^{-1} = \boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{P}_{\kappa_1^i}^{-1} = \boldsymbol{X}_{\kappa_1^i}$，$\boldsymbol{P}_{\kappa_2^i}^{-1} = \boldsymbol{X}_{\kappa_2^i}$，$\cdots$，$\boldsymbol{P}_{\kappa_m^i}^{-1} = \boldsymbol{X}_{\kappa_m^i}$，$\boldsymbol{P}_j^{-1} = \boldsymbol{X}_j$，

将式(4a)两侧分别乘以 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{X}_{\kappa_1^i}, \boldsymbol{X}_{\kappa_2^i}, \cdots, \boldsymbol{X}_{\kappa_m^i}, \boldsymbol{X}_i)$及其转置的形式，将式(4b)两侧分别乘以 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{X}_j, \boldsymbol{X}_i)$及其转置的形式，得到

$$\begin{bmatrix}
-\boldsymbol{X}_{\kappa_1^i} & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i \\
\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{X}_{\kappa_2^i} & \cdots & \cdots & \sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{X}_{\kappa_m^i} & \sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i \\
\sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} & \sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} & \cdots & \sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} & -\Big(\sum_{j\in l_k^i}^{N}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{X}_i
\end{bmatrix} < \boldsymbol{0}, \tag{5a}$$

$$\begin{bmatrix}
-\boldsymbol{X}_j & \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i & -\boldsymbol{X}_i
\end{bmatrix} < \boldsymbol{0}. \tag{5b}$$

利用$(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)$及式(5)中的 $\boldsymbol{A}_i$ 即可以得到

$$\begin{bmatrix}
-\boldsymbol{X}_{\kappa_1^i} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & & \sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{X}_i \\
\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{X}_{\kappa_2^i} & \boldsymbol{0} & \cdots & & \sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{X}_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & & -\boldsymbol{X}_{\kappa_m^i} & \sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{X}_i \\
\sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}} & \sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}} & \cdots & & \sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}} & -\Big(\sum_{j\in l_k^i}^{N}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{X}_i
\end{bmatrix} < \boldsymbol{0}, \tag{6a}$$

$$\begin{bmatrix}
-\boldsymbol{X}_j & (\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{X}_i \\
\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{K}_i)\mathrm{T} & -\boldsymbol{X}_i
\end{bmatrix} < \boldsymbol{0}. \tag{6b}$$

对式(6)利用 $\boldsymbol{M}_i=\boldsymbol{M}_i^0(\boldsymbol{I}_i+\boldsymbol{\Phi}_i)$ 以及引理1,并且设 $\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{X}_i$ 即可得到

$$
\begin{bmatrix}
(-\boldsymbol{X}_{\kappa_1^i}+\varepsilon\pi_{i\kappa_1^i}\times \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}}) & \varepsilon\sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}\sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i\times(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}} & \cdots & \varepsilon\sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}\sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}\times\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}} & \sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{Y}_i) \\
\boldsymbol{0} & (-\boldsymbol{X}_{\kappa_2^i}+\varepsilon\pi_{i\kappa_1^i}\boldsymbol{B}_i\times \boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}}) & \cdots & \varepsilon\sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}\sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}\times\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}} & \sqrt{\pi_{i\kappa_2^i}}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{Y}_i) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{X}_{\kappa_m^i}+\varepsilon\pi_{i\kappa_1^i}\boldsymbol{B}_i\times\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}} & \sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{Y}_i) \\
(*) & (*) & \cdots & (*) & -(\sum_{j\in I_k^i}^{N}\pi_{ij})\boldsymbol{X}_i
\end{bmatrix}+
$$

$$
\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_i^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\varepsilon^{-1}\boldsymbol{I}[\boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}\ \cdots\ \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{J}_i^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_i]<\boldsymbol{0}\ , \tag{7a}
$$

$$
\begin{bmatrix}-\boldsymbol{X}_j+\zeta\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{M}_i^0\boldsymbol{Y}_i\\ (*) & -\boldsymbol{X}_i\end{bmatrix}+
$$

$$
\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \zeta^{-1}\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{Y}_i\end{bmatrix}<\boldsymbol{0}\ . \tag{7b}
$$

对式(7)利用引理2即可得到定理2的2个不等式. 证毕.

3　数值例子

考虑二维4模态的离散 Markovian 跳变系统,参数如下:

$$
\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0.32 & -0.4\\ 0.8 & -0.8\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0.08 & -0.26\\ 0.8 & -1.12\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0.16 & -0.08\\ 0.8 & -0.96\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}0.48 & -0.18\\ 0.8 & -0.88\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}0.8\\ -1\end{bmatrix}.
$$

执行器故障的变化范围为 $0.1\leqslant\alpha\leqslant1.1$,在此范围下的故障矩阵为

$$
\boldsymbol{M}_1^0=\boldsymbol{M}_2^0=\boldsymbol{M}_3^0=\boldsymbol{M}_4^0=0.5.
$$

系统的转移概率矩阵为

$$
\boldsymbol{\pi}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4\\ ? & ? & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & ? & ? & ?\\ 0.2 & ? & ? & ?\end{bmatrix}.
$$

根据定理2,设计的可靠控制器为

$$\boldsymbol{K}_1=[-0.2165\quad 0.2663],$$
$$\boldsymbol{K}_2=[0.3468\quad -0.3931],$$
$$\boldsymbol{K}_3=[-0.1895\quad 0.1984],$$
$$\boldsymbol{K}_4=[0.1335\quad -0.3605].$$

在转移概率矩阵下,设初始条件为 $\boldsymbol{x}_0=[0.3\ \ -0.4]^{\mathrm{T}}$. 图1a表明离散 Markovian 跳变系统的开环系统是不稳定的. 图1b表明本文所设计的可靠控制器可以使得系统在出现执行器故障的时候达到随机稳定.

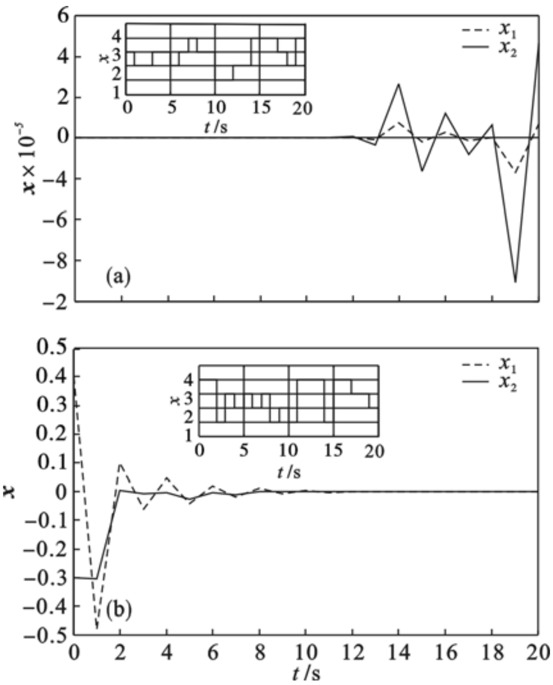

图1　状态响应曲线

Fig. 1　Curves of state response

(a)—开环系统; (b)—闭环系统.

4　结　　论

本文针对执行器故障和概率转移矩阵部分未知的情况,研究了离散 Markovian 跳变系统的可靠控制问题. 设计一个状态反馈可靠控制器,不仅使得闭环系统在无故障的时候是随机稳定的,而且在执行器出现故障的时候还能使得闭环系统是随机稳定的.

(下转第478页)