

太阳轮偏心误差对人字齿行星传动动态特性影响

秦大同, 任菲, 吴晓铃

(重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044)

摘 要: 以人字齿行星齿轮为研究对象, 考虑人字齿齿轮实际结构, 基于集中参数理论, 建立计入各个构件轴向振动的人字齿行星传动广义动力学模型, 建模中考虑制造偏心误差和齿廓误差、轴承支撑刚度、轮齿时变啮合刚度和陀螺效应等影响因素. 该模型可用于具有不同类型制造误差和任意数目行星轮的人字齿行星传动振动性能分析. 采用数值算法求解系统受迫振动响应, 分别分析了时域和频域动态响应. 以太阳轮制造偏心误差 E_s 为例, 着重研究 E_s 对人字齿行星传动动态特性影响规律. 结果表明: 制造误差 E_s 增强了人字齿行星传动系统中的动态响应以及动态啮合力的波动.

关 键 词: 人字齿行星传动; 制造误差; 时变啮合刚度; 动力学模型; 动态特性

中图分类号: TH 113

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2015)05-0709-06

Effect of Sun Gear Manufacturing Eccentric Errors on Dynamic Performances of Herringbone Planetary Gear Train

QIN Da-tong, REN Fei, WU Xiao-ling

(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China.

Corresponding author: REN Fei, E-mail: renfei2010phd@163.com)

Abstract: Based on the structure of herringbone gears and using the lumped-parameter method, a generalized dynamic model of a herringbone planetary gear train (HPGT) was presented to study the forced vibration characteristics. Taking into account the manufacturing eccentric errors and tooth profile errors, bearing stiffness, time-varying mesh stiffness, and gyroscopic effect, the model can be utilized for the vibration performance analysis with different types of manufacturing errors and arbitrary number of planets. The forced vibrations of an HPGT were numerically computed with the presented model, and analyzed in time and frequency domain, respectively. The effects of manufacturing errors especially the sun gear eccentric error E_s on dynamic characteristics were discussed, revealing that manufacturing error excitations, such as the sun gear eccentric error E_s , enhance the dynamic responses and dynamic mesh force fluctuations in HPGT.

Key words: herringbone planetary gear train (HPGT); manufacturing errors; time-varying mesh stiffness; dynamic modeling; dynamic performance

行星传动由于具有高功率密度、大传动比、结构紧凑等优点而广泛应用于直升机、汽车、风电等传动中. 行星传动通常由直齿、斜齿或者人字齿等齿形组成. 与斜齿轮相比, 人字齿轮具有更高承载能力、更大重合度和较小轴向力等优点, 因而人字齿行星传动在采煤机等重型机械传动系统中得到了广泛应用. 行星齿轮传动系统的动态特性直接影响装备传动系统的稳定性和可靠性.

国内外学者针对直齿或斜齿行星传动的动力学建模及其动态分析做了大量研究工作. Lin 等^[1-2]建立了单级直齿行星传动平移-扭转动力学模型来研究其自由振动特性. Kahraman^[3]建立了单级斜齿行星传动动力学模型来分析其动态性能. 然而, 有关人字齿行星传动动力学的文献却非常有限. Sondkar 等^[4]建立单级人字齿行星传动线性时不变动力学模型来研究其自由和受迫振动

特性. Bu 等^[5]建立了滑动轴承支撑人字齿行星传动动力学模型,并利用该模型研究了其模态特性. 此外,在实际行星传动中不可避免地存在制造误差,然而,上述文献没有考虑制造误差. Chaari 等^[6]考虑到偏心误差和齿廓误差,讨论了制造误差对直齿行星传动动态特性的影响. Kahraman^[7]考虑了制造、安装误差,建立了直齿行星传动非线性时变动力学模型,并研究了制造、安装误差的变化对均载的影响. 然而,对于行星传动自由、受迫振动的研究大部分集中于直齿、斜齿行星传动,而制造误差对人字齿行星传动动力学影响的研究尚无报道.

本文考虑人字齿轮实际结构,采用集中参数法,提出了一个广义的人字齿行星传动动力学模型,用来研究太阳轮偏心制造误差 E_s 对人字齿行星传动系统动态特性影响,具有实际意义.

1 人字齿行星传动系统的动力学模型

1.1 动力学模型描述

人字齿行星齿轮传动装置简图如图 1 所示. 它由一个太阳轮 s , 一个左侧内齿轮 $r2$, 一个右侧内齿轮 $r1$, N 个行星轮 pi 和一个行星架 c 组成. 其中,太阳轮和行星架分别作为输入、输出构件. 考虑到安装条件的限制,内齿圈采用两个旋向相

反的斜齿轮 $r1, r2$, 而太阳轮和各行星轮均采用人字齿轮. 所有的齿轮和行星架都安装在各自柔性轴上,而这些柔性轴均采用滚动轴承支撑.

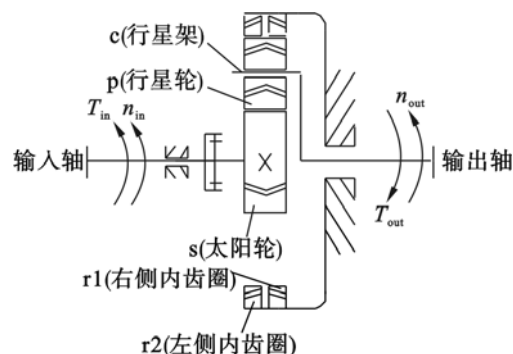


图 1 人字齿行星传动系统简图

Fig. 1 Structure of HPGT

图 2 为采用集中参数方法建立的人字齿行星传动系统的弯曲-扭转-轴向耦合动力学模型. 在建模过程中,除了考虑到各个构件在垂直于轴线的平面内沿水平和竖直方向的弯曲振动及其绕旋转轴线的扭转振动外,还考虑到了由制造误差引起的人字齿轮(太阳轮、行星轮),行星架以及左、右内齿圈的轴向振动;行星架和齿轮轮体被看作刚体,轮齿和支承被简化为弹簧;各行星轮沿周向均匀分布,且质量、轴承支承刚度等参数均相同;人字齿轮左、右侧除了螺旋角相反之外,在几何上是完全相同的.

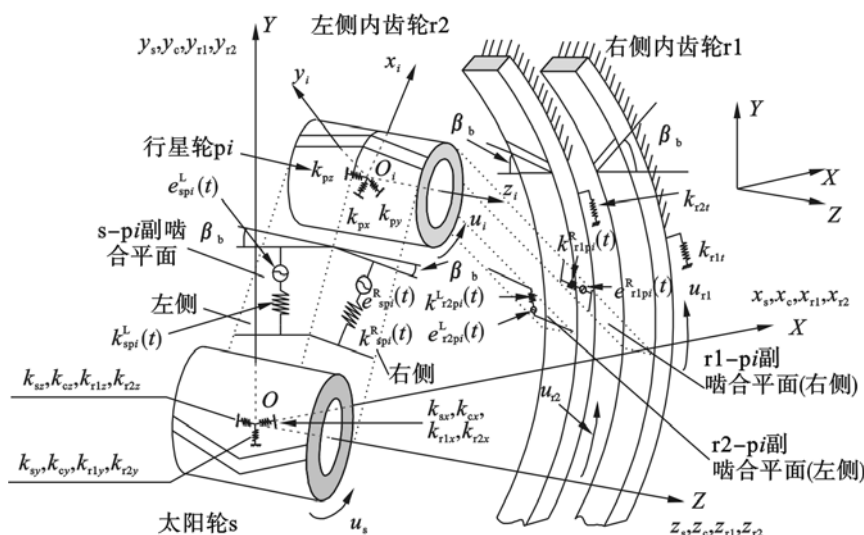


图 2 考虑人字齿轮两侧的人字齿行星传动系统弯-扭-轴耦合动力学模型

Fig. 2 The lumped-parameter dynamic model of a HPGT considering both sides of gear

图 2 中, $OXYZ$ 为静止坐标系; $Oxyz$ 为行星架随动坐标系,该坐标系与行星架固连并随行星架以其理论角速度 ω_c 匀速转动,设定坐标系原点 O 为行星架理论安装中心, x 轴指向第一个行星轮的静平衡位置, x 轴正方向逆时针转过 90° 即为 y

轴正方向, z 轴通过坐标原点 O 同时垂直于 x 轴、 y 轴; $O_i x_i y_i z_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 是与行星架固连并随行星架一起匀速转动的坐标系,其坐标原点位于第 i 个行星轮的理论中心,其三个坐标轴与 $Oxyz$ 的三个坐标轴分别平行. $x_j, y_j, z_j (j = s, c,$

r_1, r_2) 表示由于系统振动而使各构件质心偏离理论位置的线位移。 θ_j 表示由于系统振动而使各构件产生的角位移。 $u_j = r_j \theta_j$ 表示由振动引起的角位移等价到切向的线位移, 其中 r_j 是各构件的回转半径。 k_{xj}, k_{yj}, k_{zj} ($j = s, c, r_1, r_2$) 分别表示构件 j 在 x, y, z 方向的轴承支撑刚度; k_{px}, k_{py}, k_{pz} 分别表示行星轮在径向、切向、轴向的轴承支撑刚度; $k_{spi}^L(t), k_{spi}^R(t), k_{r2pi}^L(t), k_{r1pi}^L(t)$ 分别表示左侧第 i 个太阳轮-行星轮副, 右侧第 i 个太阳轮-行星轮副, 第 i 个左侧内齿圈-行星轮副和第 i 个右侧内齿圈-行星轮副的时变啮合刚度。 $e_{spi}^L(t), e_{spi}^R(t), e_{r2pi}^L(t), e_{r1pi}^L(t)$ 分别表示左、右侧外、内啮合副的静态传递误差。

1.2 各构件相对位移

图3为人字齿行星轮系中各构件之间的相对位移关系。图中 α_{ri}, α_{si} 分别为第 i 个内、外啮合副的端面啮合角; φ_i 为第 i 个行星轮理论中心与行星架理论中心的连线与 x 轴正方向的夹角 ($\varphi_i = 2\pi(i-1)/N$)。

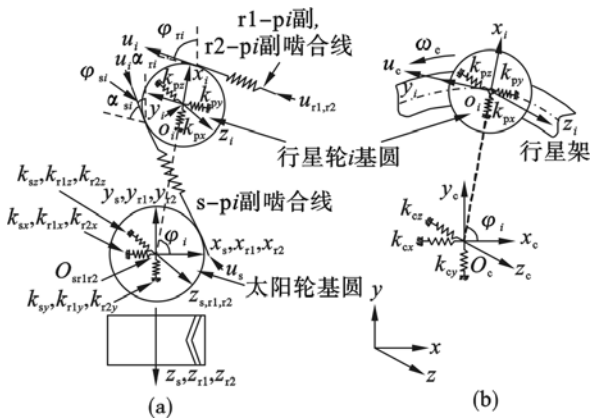


图3 人字齿行星传动各构件之间的相对位移

Fig. 3 Relative displacement relationships among HPGT components

- (a) 一人字齿内、外啮合副的相对位移;
(b) 一第 i 个人字齿行星轮与行星架的相对位移。

由图3推导出系统左、右侧外、内啮合副分别沿啮合线上以及行星轮与行星架之间的相对位移 $\Delta_{spi}^L, \Delta_{spi}^R, \Delta_{r2pi}^L, \Delta_{r1pi}^L, \Delta_{xcpi}, \Delta_{ycpi}$ 表达式^[8]。

1.3 系统运动微分方程

假设太阳轮、行星架、行星轮、左侧内齿圈和右侧内齿圈的质量分别为 m_s, m_c, m_p, m_r 和 m_r , 其转动惯量分别为 I_s, I_c, I_p, I_r 和 I_r 。分析各构件的受力情况, 依据牛顿第二定律, 可建立各构件的运动微分方程。由于篇幅所限, 仅列出太阳轮的运动微分方程。其他构件方程用同样的方法得到。

$$\left. \begin{aligned} & m_s (\ddot{x}_s - 2\omega_c \dot{y}_s - \omega_c^2 x_s) - \\ & \sum_{i=1}^N (k_{spi}^R \Delta_{spi}^R \cos \beta_b + \\ & k_{spi}^L \Delta_{spi}^L \cos \beta_b) \sin \varphi_{si} + k_s \cdot x_s = 0, \\ & m_s (\ddot{y}_s + 2\omega_c \dot{x}_s - \omega_c^2 y_s) + \\ & \sum_{i=1}^N (k_{spi}^R \Delta_{spi}^R \cos \beta_b + \\ & k_{spi}^L \Delta_{spi}^L \cos \beta_b) \cos \varphi_{si} + k_s \cdot y_s = 0, \\ & m_s \ddot{z}_s + \sum_{i=1}^N (k_{spi}^L \sin \beta_b \Delta_{spi}^L) - \\ & \sum_{i=1}^N (k_{spi}^R \sin \beta_b \Delta_{spi}^R) + k_{sz} \cdot z_s = 0, \\ & \frac{I_s}{r_s^2} \ddot{u}_s + \sum_{i=1}^N (k_{spi}^R \Delta_{spi}^R \cos \beta_b + \\ & k_{spi}^L \Delta_{spi}^L \cos \beta_b) + k_{st} \cdot u_s = \frac{T_s}{r_s}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

组装各构件的运动微分方程可推导出系统动力学方程。其矩阵形式为

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \omega_c \cdot \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_m - \omega_c^2 \cdot \mathbf{K}_\omega) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{F}(t). \quad (2)$$

式中: \mathbf{X} 为系统广义坐标列阵, 且 $\mathbf{X} = [x_s, y_s, z_s, u_s, x_{r1}, y_{r1}, z_{r1}, u_{r1}, x_{r2}, y_{r2}, z_{r2}, u_{r2}, x_c, y_c, z_c, u_c, x_1, y_1, z_1, u_1, \dots, x_N, y_N, z_N, u_N]^T$; \mathbf{M} 为系统广义惯性矩阵; \mathbf{G} 为系统陀螺矩阵; \mathbf{K}_b 为系统轴承支撑刚度矩阵; \mathbf{K}_m 为系统啮合刚度矩阵; \mathbf{K}_ω 为系统向心刚度矩阵; \mathbf{T} 为系统外激励矩阵; $\mathbf{F}(t)$ 为系统内激励矩阵。

2 系统的内部激励

2.1 时变啮合刚度激励

在人字齿行星传动系统中, 左、右侧第 i 个外、内啮合副的时变啮合刚度 $k_{spi}^L(t), k_{spi}^R(t), k_{r2pi}^L(t), k_{r1pi}^L(t)$ ^[8] 均采用斜齿轮啮合刚度公式^[9] 表达成一阶傅里叶级数的形式。考虑了行星轮啮合相位关系^[10], 包含在傅里叶系数 $a_{spi}^L, b_{spi}^L, a_{r2pi}^L, b_{r2pi}^L$ 中。

2.2 误差激励

在本文中, 考虑行星架和各齿轮的制造偏心误差以及齿廓误差。将各构件的偏心误差和齿廓误差分别转化到齿轮副啮合线上, 通过叠加可得到人字齿行星传动系统中的左侧、右侧第 i 个外啮合副、内啮合副的误差等效位移 $e_{spi}^L, e_{spi}^R, e_{r2pi}^L$ 和 e_{r1pi}^R ($i = 1, 2, \dots, N$) 的表达式^[8]。

3 实例仿真

本文针对如图1所示的具有3个周向均布行星轮、内齿圈固定的人字齿行星齿轮传动系统进行分析,其基本参数见表1.

表1 仿真的人字齿行星传动参数
Table 1 Parameters of the emulational HPGT

参数	太阳轮	行星轮	行星架	左侧内齿圈	右侧内齿圈
齿数 Z	23	17	—	57	57
法面模数 m_n/mm	27	27	—	27	27
齿宽 $b/(\text{mm})$	360	360	—	170	170
螺旋角 $\beta/(^{\circ})$	25	25	—	25	25
法面压力角 $\alpha_n/(^{\circ})$	20	20	—	20	20
质量 $/\text{kg}$	750	525	5 091	450	450
$(I/r^2)/\text{kg}$	663	420	5 724	546	546
x, y, z 方向轴承支撑刚度 $/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$k_{sx,y,z} = 10^8, k_{px,y,z} = 10^9, k_{cx,y,z} = 10^9,$ $k_{rlx,y,z}^R = k_{rlx,y,z}^L = 10^{10}$				
输入转速 $/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	100				
输入扭矩 $/(\text{kN}\cdot\text{m})$	100				

3.1 太阳轮制造偏心误差 E_s 对动态响应的影响

对于如图1所示人字齿行星传动系统,为了研究太阳轮制造偏心误差对其振动响应的影响,分别求解并比较分析了在没有制造误差和仅有太阳轮偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$ 两种情况下的振动响应.

图4为仅有太阳轮偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$ 时系统中的一些主要构件(如:行星架、太阳轮、行星轮)分别在 x 方向、 y 方向、 z 方向(轴向)以及 u 方向(扭转位移方向)的振动位移时域响应.从图4中可以看到:(1)系统构件在各个自由度方向上的时域振动位移响应均围绕着它们各自的平衡位置波动,并存在低频周期波动;(2)各个构件轴向振动位移比其横向振动位移要小,并且与太阳轮和行星轮相比,行星架 x 方向、 y 方向、轴向以及 u 方向振动位移比太阳轮和行星轮分别在对应方向上的振动位移要小,这可能是由于行星架较低转速引起的;(3)与其他构件相比,太阳轮的横向振动位移较大,这可能是由于太阳轮的偏心制造误差 E_s 产生的;(4)各个构件的横向振动位移比轴向振动位移至少大2个数量级,这可能是由于人

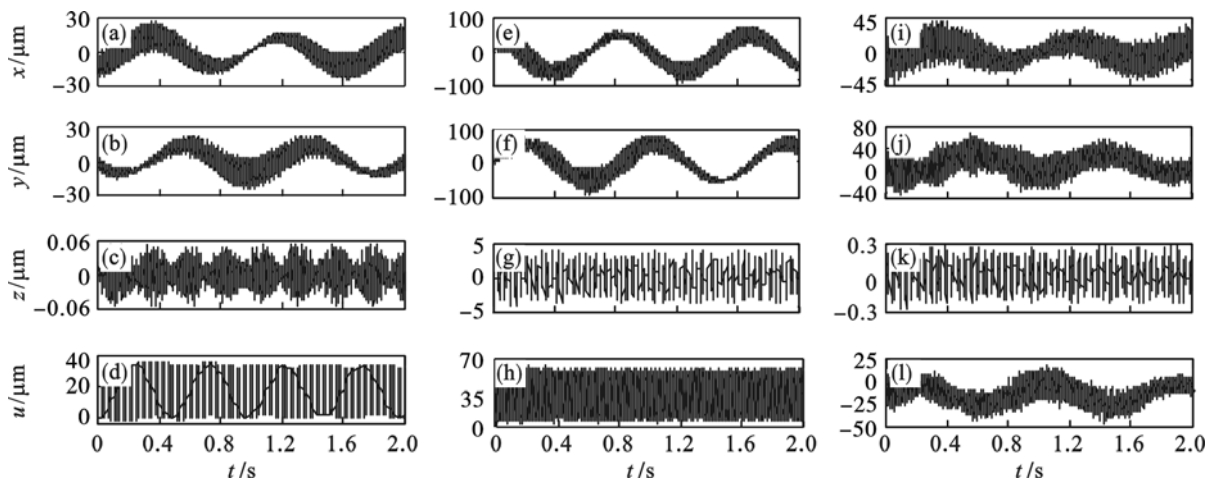


图4 太阳轮制造偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$ 时的时域响应

Fig. 4 Time domain responses of the system component vibration displacements with the sun gear eccentric error $E_s = 100 \mu\text{m}$

- (a)一行星架在 x 方向振动位移; (b)一行星架在 y 方向振动位移; (c)一行星架在 z 方向振动位移;
(d)一行星架在 u 方向扭转位移; (e)一太阳轮在 x 方向振动位移; (f)一太阳轮在 y 方向振动位移;
(g)一太阳轮在 z 方向振动位移; (h)一太阳轮在 u 方向振动位移; (i)一行星轮在径向 x 方向振动位移;
(j)一行星轮在切向 y 方向振动位移; (k)一行星轮在 z 方向振动位移; (l)一行星轮在 u 方向扭转振动位移.

字齿轮两侧对称结构引起的;(5)与其他构件的扭转振动相比,太阳轮的扭转振动位移最大,大约在 $0 \sim 70 \mu\text{m}$ 的范围内,这可能是由于人字齿行星传动系统中太阳轮的较高转速引起的.

图5为没有制造误差时系统中的一些主要构件(如:行星架、太阳轮、行星轮)分别在 x 方向、 y

方向、 z 方向(轴向)以及 u 方向(扭转位移方向)的振动位移时域响应.通过将图4a,图4e,图4i与图5a,图5e,图5i对比,可以看到在没有误差情况下的各构件(行星架、太阳轮、行星轮) x 方向的振动位移幅值明显比仅有太阳轮偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$ 情况下的相应构件 x 方向振幅要小,而且

太阳轮在两种情况下的 x 方向振幅变化最为明显,这是由于太阳轮的偏心误差 E_s 引起的.同时,还可以看到没有制造误差时的各构件 y 方向振幅也明显比太阳轮偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$ 情况下的相应构件在 y 方向振幅要小;系统各构件 u 方向(扭转方向)振幅也观察到相同的趋势.如图 5c,图 5g,图 5k 所示,忽略制造误差情况下,人字齿太阳轮、行星轮以及行星架 z 方向(轴向)振动位移将消失,就像直齿行星传动一样,这是因为人字齿行星传动系统中的人字齿轮轴向振动位移主要

是由误差激励激起的,即制造误差激励是引起轴向振动的振源并对人字齿行星传动中的各构件轴向振动有直接影响.从图 4 和图 5 中,可以看到制造误差如太阳轮偏心误差 E_s 增强了人字齿行星齿轮传动系统中的各构件在各自自由度方向上的振动位移.因此,可知制造误差激励如太阳轮偏心误差 E_s 对振动的贡献是较大的.总之,制造误差激励如太阳轮偏心误差 E_s 增强了人字齿行星传动的动态响应.

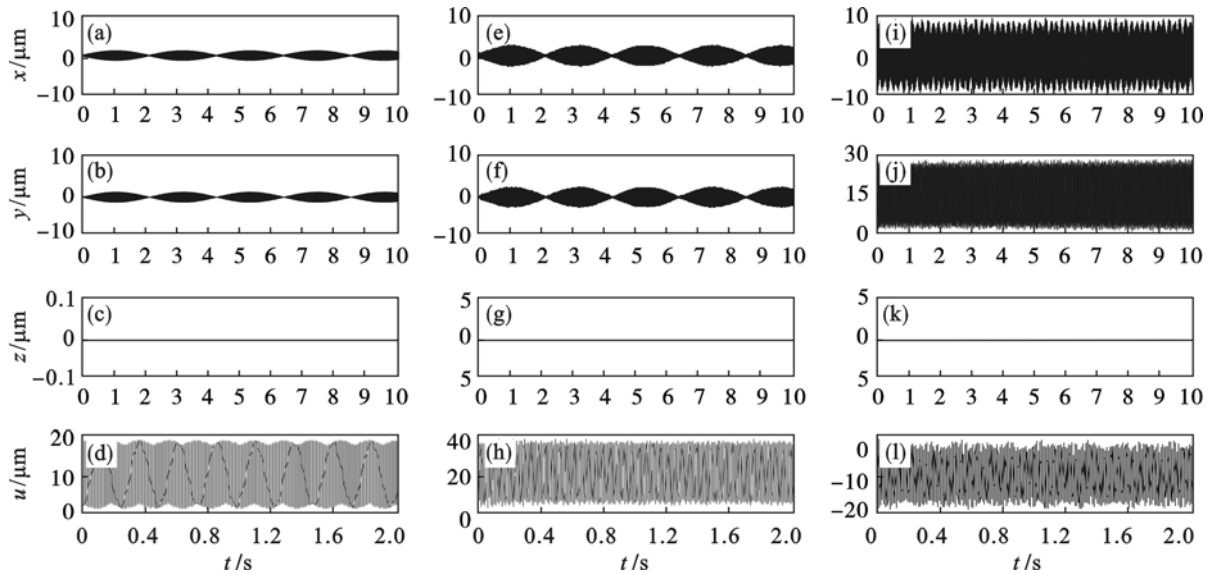


图5 没有制造误差时系统构件振动位移的时域响应曲线

Fig. 5 Time domain responses of the system component vibration displacements without manufacturing errors

- (a)一行星架在 x 方向振动位移; (b)一行星架在 y 方向振动位移; (c)一行星架在 z 方向振动位移;
(d)一行星架在 u 方向扭转位移; (e)一太阳轮在 x 方向振动位移; (f)一太阳轮在 y 方向振动位移;
(g)一太阳轮在 z 方向振动位移; (h)一太阳轮在 u 方向振动位移; (i)一行星轮在径向 x 方向振动位移;
(j)一行星轮在切向 y 方向振动位移; (k)一行星轮在 z 方向振动位移; (l)一行星轮在 u 方向扭转振动位移.

3.2 太阳轮偏心误差 E_s 对动态啮合力的影响

图 6 为分别在太阳轮偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$ 和没有制造误差两种情况下,右侧太阳轮与第一个行星轮之间的动态啮合力 $F_{\text{sp1}}^R = \delta_{\text{sp1}}^R \cdot k_{\text{sp1}}^R$ 随时间变化曲线.由于作用在太阳轮上的输入扭矩 $T_s = 100 \text{ kN}$ 为一常数,因而图6中可以明显地观察到

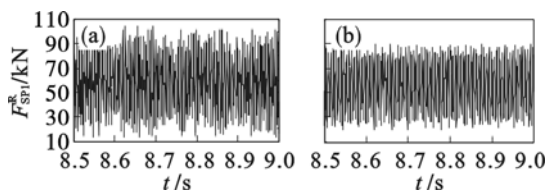


图6 右侧太阳轮-行星轮1副之间的动态啮合力 $F_{\text{sp1}}^R(t)$ 时域响应曲线

Fig. 6 Time domain responses of the dynamic mesh force $F_{\text{sp1}}^R(t)$ of the right side sun-planet 1

- (a)一太阳轮制造偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$;
(b)一没有制造误差时.

两种情况下人字齿行星传动中的右侧太阳轮-第一个行星轮副之间的动态啮合力分别都没有低频成分.同时,可以看到在两种情况下的人字齿行星传动中的右侧太阳轮-第一个行星轮副之间的动态啮合力均值大约为 $5.7 \times 10^4 \text{ N}$.通过比较图 6a 和图 6b,可以观察到太阳轮偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$ 情况下的右侧太阳轮-第一个行星轮副之间的动态啮合力在时域上的波动幅值明显比没有制造误差情况下的波动幅值要大,即制造误差如太阳轮偏心误差 E_s 增强了动态啮合力的波动.

图 7 为分别在太阳轮偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$ 和没有制造误差两种情况下,右侧太阳轮与第一个行星轮之间的动态啮合力 $F_{\text{sp1}}^R = \delta_{\text{sp1}}^R \cdot k_{\text{sp1}}^R$ 频谱图.从图 7a 中,可以观察到一些主要频率成分如 27.3, 133, 162, 213, 232, 613, 1187 Hz 等出现在 F_{sp1}^R 频谱中.在 0 Hz 处对应的 F_{sp1}^R 频谱的峰值

是最高的,这是 F_{sp1}^R 的直流分量. 并且可以看到在 0 Hz 处的动态啮合力幅值是 5.7×10^4 N, 刚好等于图 6a 中所示的时域上动态啮合力的平均值. 此外,在图 7a 中 162 Hz 处,对应的 F_{sp1}^R 频谱的峰值是次高的,并且 162 Hz 对应系统的第 7 阶固有频率. 此外,133,213,232,613,1 187 以及 27.3 Hz 分别对应系统的第 5,8,9,16,22 阶固有频率以及系统啮合频率. 因此,可知图 7a 中的具有太阳轮偏心误差情况下的动态啮合力 F_{sp1}^R 频谱在系统啮合

频率(27.3 Hz)和固有频率如 133,162,213,232,613,1 187 Hz 处出现了较大幅值. 动态啮合力的频谱特性和模态分析结果具有较好的一致性. 图 7b 是没有制造误差情况下动态啮合力 F_{sp1}^R 频谱图. 通过比较图 7a 和图 7b,可以观察到制造误差激励如太阳轮偏心误差 E_s 增强了动态啮合力的波动;同时还可看到不管是否有制造误差,动态啮合力 F_{sp1}^R 的频谱图中都出现了边频带,这可能是由于系统的时变啮合刚度产生的.

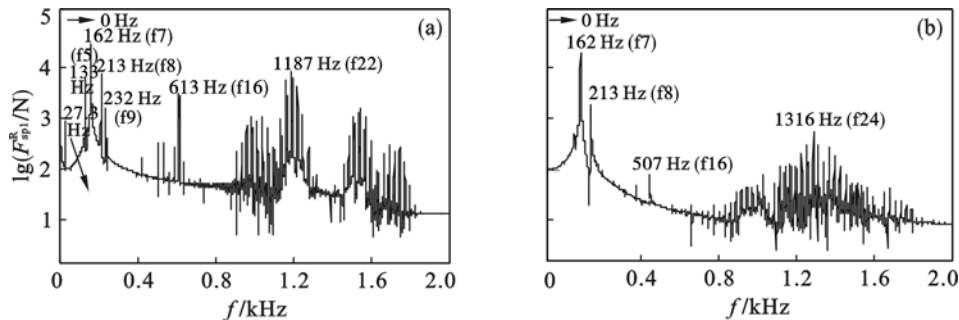


图 7 右侧太阳轮-行星轮 1 副之间的动态啮合力 $F_{sp1}^R(t)$ 频谱曲线

Fig. 7 Frequency spectra of the dynamic mesh force $F_{sp1}^R(t)$ of the right-side sun-planet 1

(a)—太阳轮制造偏心误差 $E_s = 100 \mu\text{m}$; (b)—没有制造误差时.

4 结 论

1) 基于人字齿轮实际结构特点,考虑各构件制造偏心误差和各齿轮齿廓误差,基于集中参数理论,建立了人字齿行星传动系统弯曲-扭转-轴向耦合动力学模型来研究系统的动态特性.

2) 制造误差激励如太阳轮偏心误差 E_s 对人字齿行星传动系统的动态响应以及动态啮合力均有显著影响. 制造误差激励增强了动态啮合力波动以及各构件在各自自由度方向上的振动位移响应.

3) 太阳轮偏心误差 E_s 对人字齿行星传动系统中的太阳轮、行星轮以及行星架的轴向振动均有明显影响. 制造误差激励是引起各构件轴向振动的来源. 当没有制造误差时,各构件轴向振动将消失,这就类似于直齿行星齿轮传动.

4) 不论是否有制造误差,动态啮合力 F_{sp1}^R 频谱图中均出现了边频现象,这可能是由系统的时变啮合刚度引起的,与制造误差激励无关.

参考文献:

[1] Lin J, Parker R G. Structured vibration characteristics of planetary gears with unequally spaced planets [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 233(5): 921-928.

[2] Lin J, Parker R G. Natural frequency veering in planetary gears [J]. *Mechanics of Structures and Machines*, 2001, 29(4): 411-429.

[3] Kahraman A. Planetary gear train dynamics [J]. *Journal of Mechanical Design*, 1994, 116(3): 713-720.

[4] Sondkar P, Kahraman A. A dynamic model of a double-helical planetary gear set [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 70: 157-174.

[5] Bu Z H, Liu G, Wu L Y. Modal analyses of herringbone planetary gear train with journal bearings [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 54: 99-115.

[6] Chaari F, Fakhfakh T. Influence of manufacturing errors on the dynamic behavior of planetary gears [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2006, 27(7/8): 738-746.

[7] Kahraman A. Load sharing characteristics of planetary transmissions [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1994, 29(8): 1151-1165.

[8] Ren F, Qin D T, Lim T C, et al. Study on dynamic characteristics and load sharing of a herringbone planetary gear with manufacturing errors [J]. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2014, 15(9): 1925-1934.

[9] Maatar M, Velex P. An analytical expression for the time-varying contact length in perfect cylindrical gears: some possible applications in gear dynamics [J]. *Journal of Mechanical Design*, 1996, 118(4): 586-589.

[10] Kahraman A, Blankenship G W. Planet mesh phasing in epicyclic gear sets [C] // *International Gearing Conference*. Newcastle, 1994: 99-104.