

多跨碰摩转子系统分析的降维增量谐波平衡法

姚红良, 丛艳, 许琦, 闻邦椿
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 多跨碰摩转子系统所建有限元动力学模型自由度很多, 严重降低响应预测时的计算效率. 为了提高计算效率, 同时保证计算精度, 提出结合固定界面模态综合法的降维增量谐波平衡法. 首先利用固定界面模态综合法降低多跨碰摩转子系统的自由度数目, 再利用增量谐波平衡法求解降维后系统的稳态响应, 最后还原回原系统的响应. 该方法不仅能够直接获得稳态解, 还可以与弧长法相结合从而求得非稳定解. 对双跨转子系统进行仿真试验, 结果表明该方法在主模态数较小时即可保证计算精度并且具有很高的效率.

关 键 词: 转子系统; 碰摩; 固定界面模态综合法; 增量谐波平衡法; 弧长法

中图分类号: O 322 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2015)07-0991-05

Dimension-Reduced Incremental Harmonic Balance Method for Multi-span Rubbing Rotor System

YAO Hong-liang, CONG Yan, XU Qi, WEN Bang-chun

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: YAO Hong-liang, E-mail: hlyao@mail.neu.edu.cn)

Abstract: The finite element model of multi-span rubbing rotor system has a large number of degrees of freedom, which affects the efficiency of the numerical simulation seriously. To overcome this problem and remain the accuracy of numerical simulation at the same time, a new dimension-reduced incremental harmonic balance method combining the fixed interface component mode synthesis method was presented. Firstly, the degree of freedom was reduced by the fixed interface component mode synthesis method, and then the incremental harmonic balance method was applied to obtain the stable state response of the dimension-reduced system, and at last the response of the original rotor system can be obtained. The method can not only get the stable state solution directly, but also be combined with the arc-length method to obtain the unstable state response. The results show that a two-span rotor system can reach good accuracy and high efficiency with few dominant modes.

Key words: rotor system; rubbing; fixed interface component mode synthesis method; incremental harmonic balance method; arc-length method

旋转机械碰摩故障的动力学形式很多, 如周期、拟周期、混沌等, 对其动态特性进行数值仿真很重要. 目前对旋转机械动力学分析采用的主要方法有时域和频域两种. 时域方法包括初值积分方法: Runge-Kutta 方法^[1]、Newmark- β 方法等^[2].

在分析相同振动问题时, 频域分析方法的速度要比时域分析方法快很多, 同时, 该方法还能够直接揭示出系统中频率的各种特性. 目前, 常用的

频域分析方法主要包括谐波平衡法 (harmonic balance, HB)^[3]、描述函数法 (describing function, DF)^[4]、增量谐波平衡法 (incremental harmonic balance, IHB) 等.

增量谐波平衡法, 由 Lau 和 Cheung 等最早提出^[5], 该方法不仅可以分析弱非线性问题, 还能分析强非线性问题, 并能灵活控制算法的收敛精度, 是研究强非线性问题稳态周期响应的有效

收稿日期: 2014-05-15

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (N120403007); 国家重点基础研究发展计划项目 (2011CB706504).

作者简介: 姚红良 (1979-), 男, 河北唐县人, 东北大学副教授; 闻邦椿 (1930-), 男, 浙江温岭人, 东北大学教授, 博士生导师, 中国科学院院士.

方法.采用该方法能够分析非线性振动的周期响应、拟周期响应、周期解稳定性等问题,目前正在转子动力学响应分析等方面得到了广泛的应用^[6-7].

现代大型旋转机械往往具有多跨转子结构.但是由于多跨转子系统结构复杂,动力学建模后自由度很多,如果直接采用增量谐波平衡法进行响应分析,势必遇到耗时长等问题.为了利用其稳态振动求解的优势并同时克服多自由度时计算效率低的问题,本文针对多跨碰摩故障转子系统的局部非线性特点,将固定界面模态综合法与增量谐波平衡法相结合,提出了一种新的降维增量谐波平衡法,并利用某双跨转子系统的仿真验证了该方法的有效性和效率.

1 碰摩转子模型建立方法

设转子系统由弹性轴段单元组成,如图 1 所示.轴段单元的广义坐标为两端节点的位移,仅考虑弯曲变形和扭转变形,而忽略轴向变形,则每个轴段的广义坐标为

$$[x_A \ y_A \ \theta_{yA} \ \theta_{xA} \ x_B \ y_B \ \theta_{yB} \ \theta_{xB}]^T. \quad (1)$$

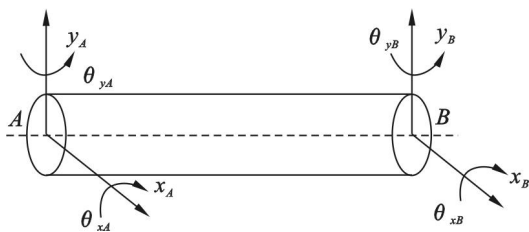


图 1 轴段有限元模型

Fig. 1 The finite element model of the shaft segment

采用有限元建模方法,碰摩转子系统的运动微分方程为

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{K}_0 \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{b0}. \quad (2)$$

式中: $\mathbf{M}_0, \mathbf{C}_0, \mathbf{K}_0$ 分别为质量、阻尼、刚度矩阵; \mathbf{x}_0 为位移向量; $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{01} \cos \omega t + \mathbf{F}_{02} \sin \omega t$ 为激励分量, $\mathbf{F}_{01}, \mathbf{F}_{02}$ 为偏心造成的激励幅值, ω 为转子转动速度; \mathbf{F}_{b0} 为碰摩力分量,假设碰摩发生在第 L 节点,则碰摩力向量可以表示为 $\mathbf{F}_{b0} = [0, \dots, 0, P_x, P_y, 0, \dots, 0]^T$, P_x, P_y 为碰摩力在 x 和 y 方向的分量.碰摩力的具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -\frac{k_r(\delta - e)}{\delta}(x - fy) \quad (\delta > e), \\ P_y &= -\frac{k_r(\delta - e)}{\delta}(y + fx) \quad (\delta > e), \\ P_x &= P_y = 0 \quad (\delta \leq e). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中: k_r 为接触刚度; f 为摩擦系数; e 为转静子间隙; $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2 固定界面模态综合法降维

对于多跨转子系统,由于每个节点有 4 个自由度,所以当划分的转子系统具有几十甚至上百个节点时,所建立动力学模型的自由度将达到上百个甚至上千个.

为了提高计算效率,可以采用固定界面模态综合法(component mode synthesis, CMS)进行自由度的降维^[8].将式(2)重新划分为线性和非线性(即碰摩位置)两部分,如式(4)所示,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ij} \\ \mathbf{M}_{ji} & \mathbf{M}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ij} \\ \mathbf{C}_{ji} & \mathbf{C}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix}. \quad (4)$$

式(4)中第一行代表线性部分,第二行代表了非线性部分.方程中仅是坐标位置的变化,未改变内部的耦合特征.假设非线性位置处的自由度固定,计算剩余自由度组成系统的模态,并取其中可能对系统响应贡献大的模态组成固定界面主模态集 $\boldsymbol{\psi}_m$,

$$\boldsymbol{\psi}_m = [\boldsymbol{\psi}_l \ \mathbf{0}]^T. \quad (5)$$

假设给某个界面自由度单位位移,保持其他界面自由度为 0,形成该自由度下的约束模态,

$$\mathbf{x}_i = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{x}_j. \quad (6)$$

对每个界面自由度按式(6)操作,形成约束模态集 $\boldsymbol{\psi}_c$,

$$\boldsymbol{\psi}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

由固定主模态集和约束模态集组合可得系统的模态矩阵 $\boldsymbol{\psi}$:

$$\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_m \ \boldsymbol{\psi}_c]. \quad (8)$$

因此,将式(4)变换为模态坐标下的振动方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_n. \quad (9)$$

式中: $\mathbf{M} = \boldsymbol{\psi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ij} \\ \mathbf{M}_{ji} & \mathbf{M}_{jj} \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}$; $\mathbf{D} = \boldsymbol{\psi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ii} & \mathbf{D}_{ij} \\ \mathbf{D}_{ji} & \mathbf{D}_{jj} \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}$;

$\mathbf{K} = \boldsymbol{\psi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}$; $\mathbf{F} = \boldsymbol{\psi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix}$; $\mathbf{F}_n = \boldsymbol{\psi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix}$.

采用数值方法求得方程(9)在模态坐标下的解 \mathbf{u} ,利用 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}$ 返回到原物理坐标,可得原系统的动态响应.

可见系统的降维主要依靠主模态集的缩减实

现,主模态集中模态数越小,所得模型的自由度越少,但是可能会影响所求得响应的精度.

3 降维后系统的增量谐波平衡求解法

对降维后的系统采用增量谐波平衡法求解.

取 $\tau = \omega t$, 则方程(9)转化为

$$Mu'' + Du' + Ku = F_n + F_1 \cos \tau + F_2 \sin \tau. \quad (10)$$

式中, u' 表示 u 对 τ 求导.

当系统存在稳态响应时,假设取到第 r 次谐波,则第 i 个自由度的响应为

$$u_i = a_{0i} + \sum_{k=1}^r (a_{ki} \cos k\tau + b_{ki} \sin k\tau) = C_s A_i. \quad (11)$$

式中: $C_s = [1 \quad \cos \tau \quad \sin \tau \quad \cdots \quad \cos r\tau \quad \sin r\tau]$;

$$A_i = [a_{0i} \quad a_{1i} \quad b_{1i} \quad \cdots \quad a_{ri} \quad b_{ri}]^T.$$

取 $S = \text{diag}[C_s \quad C_s \quad \cdots \quad C_s]$,

$$A = [A_1^T \quad A_2^T \quad \cdots \quad A_h^T]^T, \text{ 则 } u = SA.$$

设

$$u = u_0 + \Delta u, \omega = \omega_0 + \Delta \omega. \quad (12)$$

将式(12)代入方程(10),并忽略高次谐波,有

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 M \Delta u'' + \omega_0 C \Delta u' + K \Delta u + C_n(u) \Delta u' + \\ & K_n(u) \Delta u + (2\omega_0 M u'' + C u') \Delta \omega = \\ & F_1 \cos \tau + F_2 \sin \tau - F_n(u_0) - \\ & (\omega_0^2 M u''_0 + \omega_0 C u'_0 + K u_0). \end{aligned} \quad (13)$$

式中: $K_n = \frac{\partial F_n}{\partial u}$; $C_n = \frac{\partial F_n}{\partial u'}$.

对式(13)取 Galerkin 过程并整理,有

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} S^T (\omega_0^2 M S'' + \omega_0 C S' + K S + \omega_0 C_n S' + \\ & K_n S) d\tau \Delta A + \int_0^{2\pi} S^T (2\omega_0 M S'' + C S') d\tau \Delta \omega = \\ & - \int_0^{2\pi} S^T (\omega_0^2 M S'' + \omega_0 C S' + K S) d\tau A_0 + \\ & \int_0^{2\pi} S^T (F_1 \cos \tau + F_2 \sin \tau - F_n(u_0)) d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

即

$$K_m \Delta A + R_{mc} \Delta \omega = R_{m1} A_0 + R_{m2}. \quad (15)$$

对式(15)进行迭代,可以求得 A_0 , 从而求得 u .

4 弧长法

弧长法是 Newton - Raphson 迭代方法的一种改进迭代方法^[9],与增量谐波平衡法相结合能够求得系统的不稳定稳态解.

针对式(15),取

$$\Psi(A, \omega) = -R_{m1} A - R_{m2}, \quad (16)$$

将式(16)化为

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial A} \delta A + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \delta \lambda = \\ \Psi_0 &+ K_t \delta A + q \delta \lambda = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

式中: $K_t = K_m$; $q = R_{mc} A$.

增加控制方程

$$\Delta A^T \Delta A + \Delta \lambda^2 \varphi^2 \omega^2 = \Delta l^2. \quad (18)$$

式中, φ 为调整 ω 与 ΔX 的一个参数.

联立式(17)和式(18)求解 ΔA 和 $\Delta \lambda$, 由

$$\begin{aligned} A &= A^{(i+1)} = A^{(i)} + \Delta A, \lambda = \lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \Delta \lambda, \omega = \\ \omega^{(i+1)} &= \lambda \omega^{(i)} \text{ 迭代求出最终解.} \end{aligned}$$

5 仿真与讨论

某双跨转子系统如图2所示,左侧为高压缸,右侧为低压缸,划分单元尺寸详见表1.双跨转子之间用膜片联轴器相连,由于膜片联轴器刚度较低,故针对实际结构采用外径160 mm,内径140 mm,长500 mm的空心轴段来代替.此轴段介于表1中15轴段和16轴段之间,即16和17节点间.

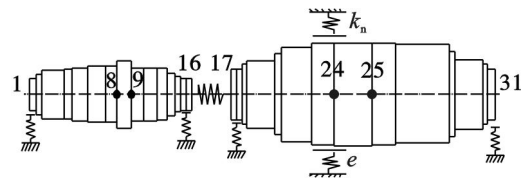


图2 双跨转子系统模型

Fig. 2 Model of the two span rotor system

表1 双跨转子系统轴段尺寸
Table 1 Shaft segment dimension of the two span rotor system

段数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
L/mm	80	80	290	100	200	240	150	180	160	180	130	100	80	75	75
D/mm	140	180	210	220	235	250	250	300	240	235	230	190	160	140	140
段数	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
L/mm	75	75	62	360	90	390	300	500	300	700	80	360	62	100	
D/mm	225	225	270	300	360	420	450	460	450	440	380	310	270	225	

取转子系统弹性模量为 2.1×10^{11} Pa, 高压缸偏心位于节点 8, 9 处, 偏心大小为 $mr_1 = 5 \times 10^{-3}$ kg·m, 两点的相位同时为 0; 低压缸偏心位于节点 24, 25 处, 偏心大小为 $mr_2 = 4 \times 10^{-2}$ kg·m. 高压缸支撑刚度为 1.5×10^8 N/m, 低压缸支撑刚度为 1×10^9 N/m. 系统阻尼为比例阻尼, 其中 $\alpha = 0$, $\beta = 0.0005$. 假设碰摩发生在第 24 节点处, 碰摩形式为整周碰摩.

设碰摩间隙为 1×10^{-4} m, 碰摩刚度为 2×10^8 N/m, 摩擦系数为 0.15, 求得碰摩点(低压缸上 24 节点)和非碰摩点(高压缸上 8 节点) x 方向的幅频响应曲线分别如图 3a 和 3b 所示. 图中对比了不采用降维和采用 CMS 降维方法的精度, 以不降维的结果为标准值, Z 为采用 CMS 方法时所取的主模态数目. 从图中可以看出, 当主模态数目较小时 ($Z = 5$), 计算结果与标准值的偏差较大, 当 $Z = 10$ 时计算结果已经非常接近标准值, 这说明本文方法的精度可以满足要求.

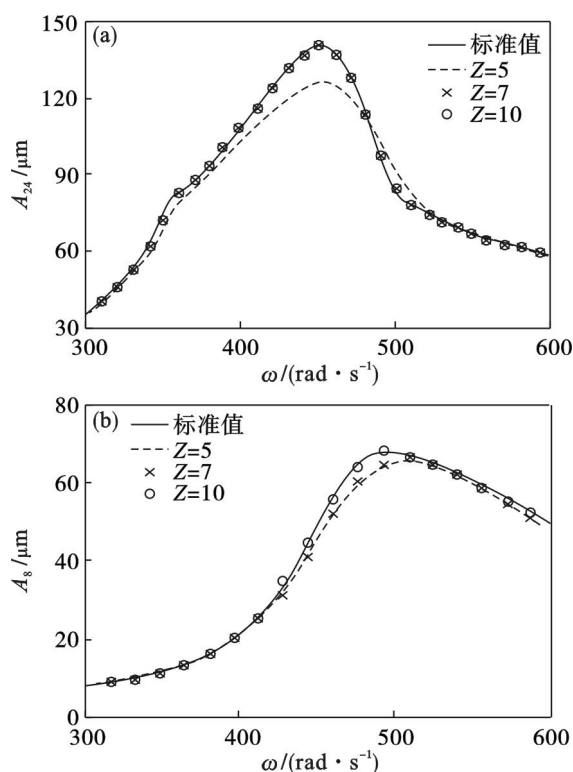


图 3 小碰摩刚度时的幅频响应曲线

Fig. 3 Amplitude-frequency response curves with small rubbing stiffness

(a)—碰摩点; (b)—非碰摩点.

设其他参数不变, 将碰摩刚度增至 10^9 N/m, 求得 24 节点和 8 节点 x 方向的幅频响应曲线分别如图 4a 和 4b 所示. 可见在碰摩刚度较大时, 采用 CMS 方法进行降维后, 仍然能够得到与标准值相近的结果. 同时可以看出, 在大碰摩刚度下,

幅频响应曲线中存在不稳定区, 不稳定解的求解是采用 IHB 方法结合弧长法的一个突出优点.

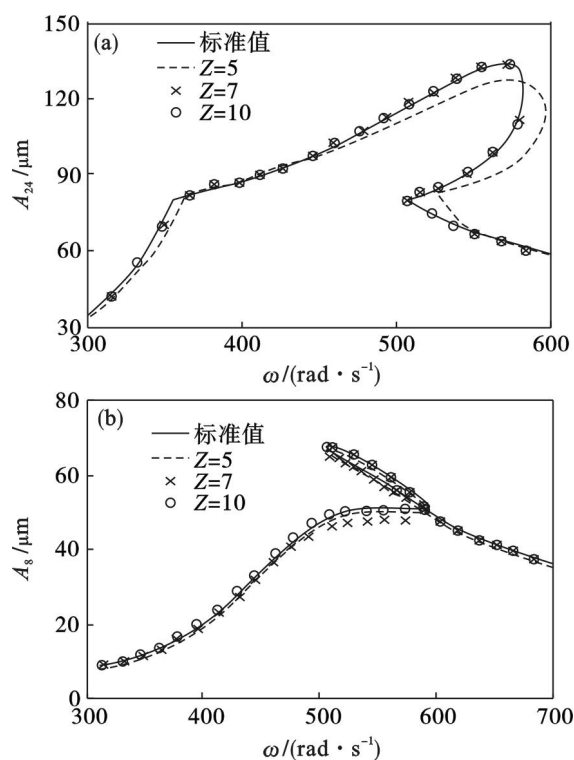


图 4 大碰摩刚度时的幅频响应曲线

Fig. 4 Amplitude-frequency response curves with large rubbing stiffness

(a)—碰摩点; (b)—非碰摩点.

接下来通过对比计算某一固定转速下的稳态响应时所需的时间来说明本文方法的效率. 所采用计算机性能: CPU 2.83 GB, 内存 3.25 GB, 采用编程语言 MATLAB, 每个周期积分取 200 步, 计算所需时间结果见表 2.

由以上分析可见, 降维后所用时间相比于未降维时明显减少. 在主模态数取 $Z = 10$ 时, 计算结果已经与不降维方法基本一致, 而所用时间仅为不降维方法的 $1/25$, 验证了该方法的有效性.

表 2 运行所需 CPU 时间对比
Table 2 Comparison of CPU time

方法	时间/s
IHB 方法, 不降维	7.67
IHB 方法, CMS 阶次 20	1.82
IHB 方法, CMS 阶次 10	0.31
IHB 方法, CMS 阶次 7	0.26
IHB 方法, CMS 阶次 5	0.24

6 结 论

1) 结合固定界面模态综合法和增量谐波平

衡法提出了降维增量谐波平衡方法,可以通过调整主模态数控制响应计算所需的时间。

2) 双跨转子系统的仿真表明主模态数取10时精度已经满足要求,而消耗时间缩短为1/25,证明了该方法具有较高的精度和效率。

参考文献:

- [1] Meybodi R R, Mohammadi A K, Bakhtiari-Nejad F. Numerical analysis of a rigid rotor supported by aerodynamic four-lobe journal bearing system with mass unbalance [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(1): 454 – 471.
- [2] Bouaziz S, Belhadj M N, Choley J, et al. Transient response of a rotor-AMBs system connected by a flexible mechanical coupling [J]. *Mechatronics*, 2013, 23(6): 573 – 580.
- [3] Wang C. Application of a hybrid method to the nonlinear dynamic analysis of a flexible rotor supported by a spherical gas-lubricated bearing system [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, 70(5): 2035 – 2053.
- [4] Wei F, Zheng G T. Multiharmonic response analysis of systems with local nonlinearities based on describing functions and linear receptance [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2010, 132(3): 0310041 – 0310046.

- [5] Lau S L, Cheung Y K, Wu S Y. Incremental harmonic balance method with multiple time scales for nonlinear aperiodic vibrations [J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50(1): 871 – 876.
- [6] Shen Y J, Yang S P, Liu X D. Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006, 48(11): 1256 – 1263.
- [7] 姚红良, 许琦, 茅列前, 等. 行星齿轮系统弯扭耦合振动的增量谐波平衡求解方法 [J]. *东北大学学报: 自然科学版*, 2013, 34(8): 1451 – 1456.
(Yao Hong-liang, Xu Qi, Mao Lie-qian, et al. Incremental harmonic balance method for coupled bending and torsional vibration in planetary gear system [J]. *Journal of Northeastern University: Natural Science*, 2013, 34(8): 1451 – 1456.)
- [8] Kawamura S, Naito T, Zahid H M, et al. Analysis of nonlinear steady state vibration of a multi-degree-of-freedom system using component mode synthesis method [J]. *Applied Acoustics*, 2008, 69(7): 624 – 633.
- [9] Ferreira J V, Serpa A L. Application of the arc-length method in nonlinear frequency response [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 284(1): 133 – 149.

(上接第 979 页)

2) 铬铁矿粗精矿的铬铁质量分数比有随粒级变细而明显降低的趋势,经提纯处理去除脉石和铁矿物后铬铁矿的铬铁质量分数比可以达到或超过 2.5。

3) 采用筛分除去 13% 的 -0.074 mm 细粒矿物后,磁选可得到产率 57.85%, 铬铁质量分数比为 2.59, 铬的回收率为 63.89% 的铬铁矿产品。

参考文献:

- [1] U S Geological Survey. Mineral commodity summaries 2012 [M]. Washington D C: U S Geological Survey, 2012: 108 – 109.
- [2] Warner A E M, Diaz C M, Dalvi A D, et al. JOM world nonferrous smelter survey. part 3: nickel, laterite [J]. *JOM*, 2006, 58(4): 11 – 20.
- [3] Whittington B I, Muir D. Pressure acid leaching of nickel laterites; a review [J]. *Mineral Processing Extraction and Metallurgy Review*, 2000, 21: 527 – 600.
- [4] Harris C T, Peacey J G, Pickles C A. Selective sulphidation and flotation of nickel from a nickeliferrous laterite ore [J]. *Minerals Engineering*, 2013, 54: 21 – 31.
- [5] Guo X Y, Li D, Park K H, et al. Leaching behavior of metals from a limonitic nickel laterite using a sulfation -roasting-

leaching process [J]. *Hydrometallurgy*, 2009, 99(3/4): 144 – 150.

- [6] Fan C L, Zhai X J, Fu Y, et al. Leaching behavior of metals from chlorinated limonitic nickel laterite [J]. *International Journal of Mineral Processing*, 2012, 110/111: 117 – 120.
- [7] McDonald R G, Whittington B I. Atmospheric acid leaching of nickel laterites review. part II: chloride and biotechnologies [J]. *Hydrometallurgy*, 2008, 91: 56 – 69.
- [8] 牟文宁, 翟玉春, 刘岩, 等. 高浓度 NaOH 浸出红土镍矿中 SiO₂ 的研究 [J]. *东北大学学报: 自然科学版*, 2009, 30(5): 708 – 711.
(Mu Wen-ning, Zhai Yu-chun, Liu Yan, et al. Study on extraction of SiO₂ from nickel laterite ore through leaching by high concentration NaOH solution [J]. *Journal of Northeastern University: Natural Science*, 2009, 30(5): 708 – 711.)
- [9] Friedrich G. Genesis of low-grade chromite ore deposits in lateritic soils from the philippines [J]. *Ore Genesis*, 1982, 2: 240 – 250.
- [10] Economou-Eliopoulos M. Apatite and Mn, Zn, Co-enriched chromite in Ni-laterites of northern Greece and their genetic significance [J]. *Journal of Geochemical Exploration*, 2003, 80(1): 41 – 54.
- [11] Hunter H M A, Herrington R J, Anne O E. Examining Ni-laterite leach mineralogy & chemistry—a holistic multi-scale approach [J]. *Minerals Engineering*, 2013, 54: 100 – 109.