

## 软土初始动剪切模量及函数计算分析

骆俊晖, 缪林昌, 石文博  
(东南大学交通学院, 江苏南京 210096)

**摘 要:** 为了深入研究软土在移动地铁荷载作用下产生的软化现象, 对南京软土进行室内 GDS 动三轴试验. 采用初始动剪切模量计算公式对南京软土进行计算和比较分析, 建立考虑频率影响因素的经验计算公式. 同时提出考虑振动次数的动剪切模量函数计算公式, 对南京软土进行计算和分析, 并用不同地区的土验证公式适用性. 结果表明: 考虑频率影响因素的初始动剪切模量计算公式能更准确地计算初始动剪切模量, 提出的考虑振动次数的动剪切模量函数计算公式对不同地区土的适用性较好.

**关 键 词:** 软土; 动荷载; 动力参数; 动剪切模量; GDS

**中图分类号:** TU 470 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2015)08-1193-06

## Calculation and Analysis of Original Dynamic Shear Modulus and Function of Soft Clay

LUO Jun-hui, MIAO Lin-chang, SHI Wen-bo

(School of Transportation, Southeast University, Nanjing 210096, China. Corresponding author: LUO Jun-hui, E-mail: jhluo85@hotmail.com)

**Abstract:** To research soft clay softening induced by moving metros load, an indoor GDS dynamic triaxial test on Nanjing soft clay was carried out. The computational formula with the original dynamic shear modulus was used to calculate and analyze the Nanjing soft clay. And an empirical formula considering the frequency factor was established. Meanwhile, a function considering the vibration number for the dynamic shear modulus was presented to calculate and analyze the Nanjing soft clay and the applicability was verified by testing on clay from different regions. It is shown that the original dynamic shear modulus formula considering the frequency factor can be accurately determined and the dynamic shear modulus function considering the vibration number has a good applicability to the clay from different regions.

**Key words:** soft clay; dynamic load; dynamic parameter; dynamic shear modulus; GDS

不同地域的软土特性不同. 长江三角洲是由长江带来的泥沙冲淤而成, 冲积层的厚度由西向东从几十米增加到 400 m. 软土在地铁移动荷载作用下的蠕变及软化现象较为明显; 若产生较大沉降, 不仅会影响地铁运营, 而且会引起衬砌结构的开裂, 严重时这些裂缝会引起漏泥, 导致二次沉降. 评价软土动力特性的动力参数是动剪切模量和动阻尼比, 本文通过分析动剪切模量<sup>[1-2]</sup>来研究软土的动力特性及其软化发展规律, 为工程事故的预警和防治提供依据.

初始动剪切模量  $G_{\max}$  的计算方法主要分为

三类: 根据现场剪切波试验计算<sup>[3]</sup>, 按照不排水强度值计算<sup>[4]</sup>, 以及考虑物理性质指标的经验计算法<sup>[5-9]</sup>; 但这些方法都没有考虑频率对初始动剪切模量的影响.

关于动剪切模量函数方面的研究, 目前常用的分析函数是 Hardin - Drnevich 等效黏弹性线性模型的动剪切模量 - 动应变关系函数和沈珠江模型函数<sup>[10-11]</sup>, 二者均基于动剪切模量和动应变关系函数进行研究, 没有与振动次数联系起来, 或者没有建立一个系统的计算方法<sup>[12]</sup>.

针对上述问题, 本文建立了一个考虑振动频

率影响的初始动剪切模量经验计算公式,并给出计算参数;同时建立了一个适用性广的动剪切模量-振动次数关系函数公式,引入稳定动剪切模量的概念,进行参数分析,并用其他土体进行验证,从机理上分析软土动剪切模量的发展规律,为研究移动地铁荷载作用下软土的动力特性提供理论指导及工程案例。

## 1 动三轴试验

### 1.1 试验材料与仪器

取原状土之前在薄壁取土器内壁均匀涂抹一层凡士林,以降低取土时的摩擦和对土样的扰动。取样现场位于南京市河西地段,软土层为淤泥质粉质黏土,厚度达 22 m 以上,均匀分布于整个场地。土层的工程特性:流塑,局部软塑,高等压缩性。

试验采用英国 GDS 公司的动三轴仪,能进行静载、动荷载作用下的三轴试验。

### 1.2 制样与试验

用原状土制样,土样为圆柱形,直径 38 mm,高 75 mm。试验过程如下。

饱和:将试样进行室外抽真空饱和,再抽气饱和,然后用三轴仪进行反压力饱和,饱和围压为 110 kPa,反压为 100 kPa。

固结:试样进行等压固结,有效固结围压为  $\sigma'_c = 75, 150$  kPa,当超静孔压力基本消散时视为完成固结。

加载:采用图 1 所示的半正弦波进行加载,动应力幅值  $\sigma_d$  分别为 83, 125, 167 Pa;加载时,设置振动次数  $N$  为 10 000 次。

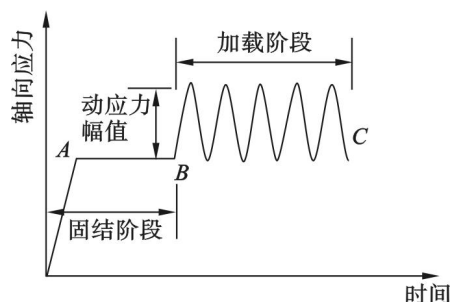


图 1 试验的加载方式  
Fig. 1 Dynamic loading mode

## 2 初始动剪切模量研究

### 2.1 初始动剪切模量试验计算

初始动剪切模量  $G_{\max}$  是土体动应变趋于零时对应的动剪切模量。根据动三轴试验结果进行数据分析。由 Hardin - Drnevich 等效线性模型计

算初始动剪切模量的误差较大,而选取动应力、应变的平均值进行计算则导致结果偏小。根据文献 [10] 的方法,本文选取滞回圈的顶点连线值动应力与动应变进行计算。荷载  $F_d = 20$  N,动应力比  $CSR = 0.111$ ,计算结果见表 1。

在相同条件下,随着围压的升高,土被压密,孔隙减小,传播的振动波速增大,相同的动应力下土体变形减小,初始动剪切模量增大。在相同条件下,随着振动频率的增加,荷载作用于土的时间越短,相同的动应力下土体变形越小,初始动剪切模量越大。

表 1 初始动剪切模量试验值

Table 1 Test values of original dynamic shear modulus

有效围压/kPa	75	75	75	150	150	150
频率/Hz	0.5	1	2	0.5	1	2
$G_{\max}$ /MPa	26	33	39	41	45	54

### 2.2 初始动剪切模量经验计算

经验算法可以在缺乏试验仪器的情况下,根据土体的物理力学性质估算初始动剪切模量,在精度允许的范围内快速确定数值。

南京软土的物理力学参数如下:含水量 37.3%,土粒相对密度 2.72,天然密度 1.877 g/cm<sup>3</sup>,孔隙比 0.99。用经验法计算南京软土的  $G_{\max}$ ,结果见表 2。

表 2 初始动剪切模量计算值

Table 2 Calculation of original dynamic shear modulus

计算方法	$G_{\max}$ /MPa	
	有效围压 75 kPa	有效围压 150 kPa
剪切波速法	18.77	18.77
Seed <sup>[4]</sup> 法	65	65
Hardin - Black <sup>[5]</sup> 法	54.04	76.42
Hardin - Drnevich <sup>[6]</sup> 法	55.61	78.64
Hardin <sup>[7]</sup> 法	21.76	25.52
Richart <sup>[8]</sup> 法	42.41	59.97
Kagawa <sup>[9]</sup> 法	20.13	40.26

通过对试验法和经验法计算结果进行对比得到:考虑物理力学性质指标的经验计算公式预测更准确,其中用 Kagawa 法的计算结果更适合分析南京软土,但是没有定量考虑振动频率对软土动力特性的影响。针对存在的问题,本文基于 Kagawa 经验公式进行改进。

### 2.3 改进的初始动剪切模量经验公式

地铁运行过程中因速度变化引起振动频率变化,随着地铁速度不断提升,振动频率的范围也相应增大,对土体的振动影响作用也加大;因此,地铁移动荷载作用下软土的振动频率是一个很重要

的影响因素. 计算得到的振动频率和南京软土初始动剪切模量成二次曲线关系, 且相关系数较高, 如图 2 所示, 图中  $\sigma_d$  为动应力幅值. 据此, 基于 Kagawa 经验公式进行改进, 考虑振动频率的影响.

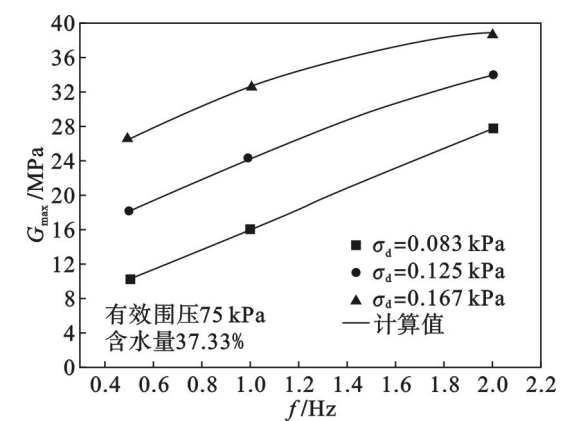


图 2 初始动剪切模量与振动频率的关系曲线  
Fig. 2 Relationship curves between the original dynamic shear modulus and vibration frequency

Kagawa 经验公式为

$$G_{\max} = \frac{358 - 3.8 I_p}{0.4 + 0.7 e} \sigma'_0. \tag{1}$$

式中:  $I_p$  为塑性指数;  $\sigma'_0$  为有效围压;  $e$  为孔隙比.

根据文献[13], 软土在相同条件下, 对不同振动频率下的初始动剪切模量值进行回归分析, 得到

$$G_{\max} = \frac{358 - 3.8 I_p}{0.4 + 0.7 e} \sigma'_0 \cdot (a_1 \cdot f^2 + a_2 \cdot f + a_3). \tag{2}$$

式中  $a_1, a_2, a_3$  通过二次回归分析求得, 见表 3 所示, 其余参数同式(1).

表 3 初始动剪切模量计算公式参数  
Table 3 Formula coefficients of original dynamic modulus

围压/kPa	频率/Hz	系数		
		$a_1$	$a_2$	$a_3$
75	0.5	-4.16	18.52	18.35
	1	-1.74	14.91	11.15
	2	0.31	11.12	4.58
150	0.5	-3.9	20.5	5.8
	1	-5.3	20.1	23.3
	2	0.22	8.14	37.4

3 动剪切模量函数分析

3.1 动剪切模量函数概述

软土在动荷载作用下, 随着动应变或者振动

次数  $N$  (以下简称振次) 增大, 动剪切模量  $G_d$  也不同, 因此可以定义一个关于动应变或者振次的动剪切模量函数公式.

动剪切模量函数计算公式可分为两类:

①动剪切模量 - 应变函数公式, 其中沈珠江提出的计算公式参数少, 准确度高, 运用广, 其表达式为

$$G_d = \frac{k_2}{1 + k_1 \cdot \gamma_c} (\sigma_s)^{1/2}. \tag{3}$$

式中:  $k_1, k_2$  为模型参数, 通过二次回归分析求得;  $\gamma_c$  为有效固结围压;  $\sigma_s$  为动应力幅值.

②动剪切模量 - 振次函数公式. 文献[12]建立的函数公式为上海软土动力特性评价提供参考, 但它是完全的经验公式, 没有讨论参数的物理意义, 其推广验证工作还有待进一步研究.

3.2 南京软土动剪切模量 - 振次函数计算

3.2.1 建立公式

目前研究的动剪切模量函数公式建立在动剪切模量和应变关系的基础上, 如果在函数公式中考虑列车振次<sup>[14]</sup>, 则可以分析软土在地铁运营期间移动荷载作用下动剪切模量随振次变化的规律, 且避开应变测量, 是一种简易而有效的确定动剪切模量的新方法.

本文采用动剪切模量 - 振次关系函数对南京软土室内动三轴试验数据进行分析. 图 3 为南京软土试验值与计算值的结果比较, 图中可以看出吻合较好. 在动荷载作用下, 试验值存在波动, 即有一个波动幅值, 取其平均值作为计算结果. 式(4)为计算公式.

$$G_d = \frac{m - k}{1 + (N/N_0)^p} + k. \tag{4}$$

式中:  $m$  为初始动剪切模量;  $k$  为稳定动剪切模量;  $p$  为模型参数.

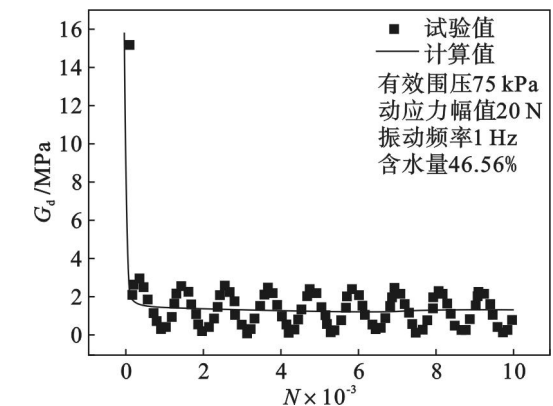


图 3 动剪切模量 - 振次关系试验值与计算值对比图  
Fig. 3 Test data and calculated values of dynamic shear modulus vs. the number of vibration

### 3.2.2 参数分析

对于式(4),当  $N \rightarrow 0$  时,  $G_d = G_{\max} = m$ ; 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $G_d = k$ , 为稳定动剪切模量, 即动应变达到无穷大时软土的动剪切模量. 根据文献[15]的结论:  $E_{s,OC}/E_{s,NCi} = (OCR)_q^{n_0}$  ( $E_{s,OC}$  为初始动弹性模量,  $E_{s,NCi}$  为任意振次下的动弹性模量,  $(OCR)_q$  为等效超固结比,  $n_0$  为试验参数, 通过最小二乘法得到). 可以得出, 不同土体在临界状态下动模量之比为一定值. 根据此规律, 南京软土动剪切模量的初始值与稳定值的关系为:  $G_{\max}/k = 6.01$ , 如图4所示.

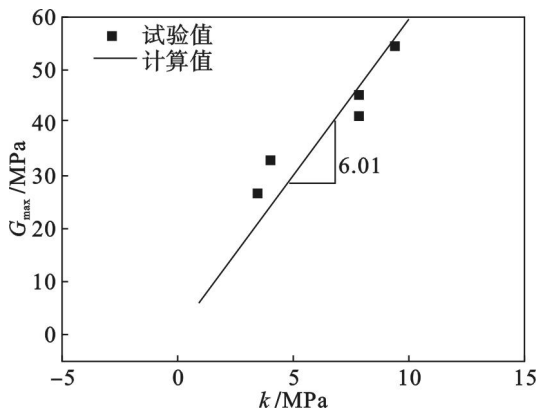


图4 初始动模量与稳定动模量关系曲线

Fig. 4 Relationship between the original dynamic shear modulus and stable modulus

式(4)中参数  $N_0, p$  与振动幅值、围压以及频

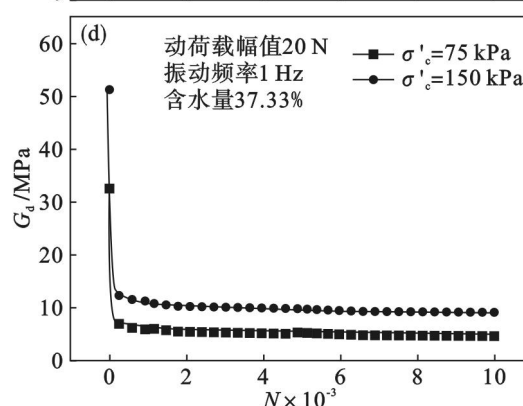
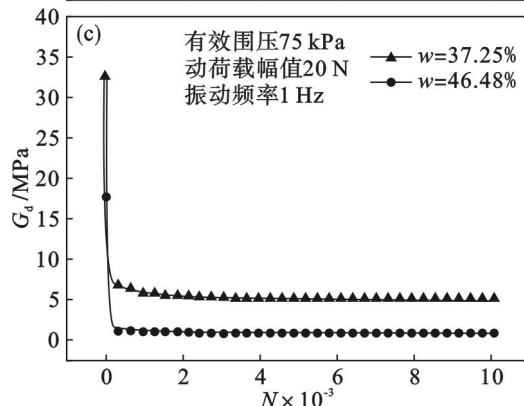
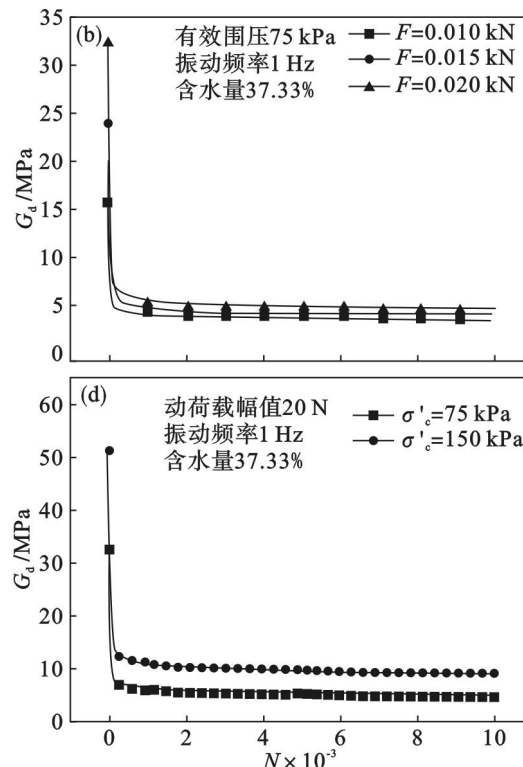
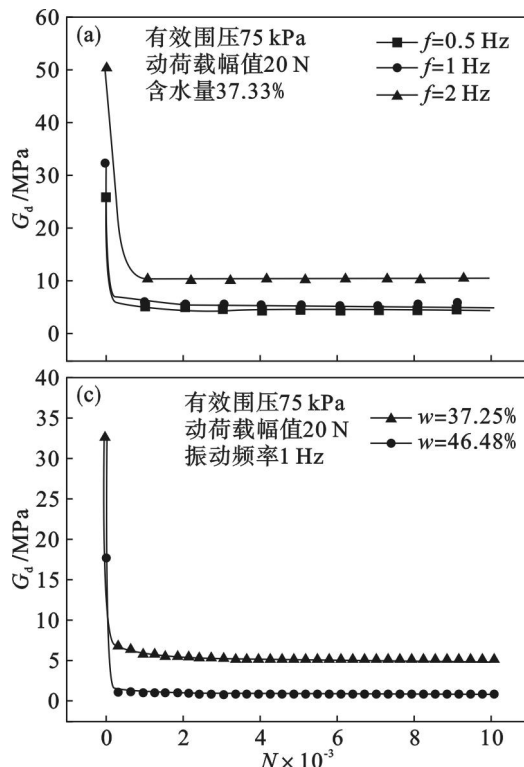


图5 南京软土不同条件下的动剪切模量-振次关系

Fig. 5 Relationship between dynamic shear modulus and the number of vibration on different conditions for Nanjing clay

(a) —不同频率; (b) —不同荷载; (c) —不同含水量; (d) —不同围压.

率等因素有关. 当  $p = 1$  时, 式(4)同文献[10]形式一致, 可进行归一化.

式(4)最终可转化为

$$G_d = \frac{0.83 G_{\max}}{1 + (N/N_0)^p} + 0.17 G_{\max}. \quad (5)$$

式中: 参数  $G_{\max}$  由式(2)确定;  $N$  为振次;  $N_0, p$  数值见表4.

表4 动剪切模量函数参数值

Table 4 Parameters of dynamic shear modulus function

围压/kPa	频率/Hz	参数	
		$N_0$	$p$
75	0.5	0.042	0.26
	1	0.086	0.29
	2	0.121	0.32
150	0.5	1.51	0.48
	1	6.75	0.42
	2	5.37	0.41

不同条件下  $N_0$  与  $p$  参数值可以通过已有数据建立回归曲线求得.

### 3.2.3 试验分析

用式(5)对南京软土计算动剪切模量, 分析频率、动荷载、含水量、围压等不同因素对动剪切模量的影响, 结果见图5. 图中符号  $f$  为振动频率,  $F$  为动荷载,  $w$  为含水量,  $\sigma'_c$  为有效围压.



由图 5 可知,曲线分为两部分,首先经历急剧的振动软化,然后进入稳态过程,最终为稳定值.其中,急剧软化和稳态之间存在一个转折点,该点为临界振动次数.可以得到,南京软土动剪切模量随振次增加逐渐减小,随振动频率的增大而增大.图 5a 中,频率 0.5 和 1 Hz 的曲线较接近,考虑到土体不均匀性,在  $f=2$  Hz 时的曲线出现变异,但其变化规律基本一致.

软土在动荷载作用下产生超静孔隙水压力,随着振次增大,软土的有效应力逐渐减小,进而引起应变、强度以及动力参数的变化.对南京软土动三轴试验结果进行计算分析,可以得到不同影响因素下,动剪切模量-振次关系的软化规律:相同条件下,动剪切模量随着振动频率、荷载、围压的增大而升高,随着含水量的增大而减小.

4 验证分析与讨论

对文献[12]的数据用本文提出的动剪切模量函数公式进行验证,其中,计算结果用  $E_d = G_d \times 2(1 + \mu)$  进行换算得到动弹性模量  $E_d$ ,泊松比  $\mu$  取 0.3,上海软土物理力学指标如下:含水量 41.3%,天然重度  $20.0 \text{ kN/m}^3$ ,土粒相对密度 3.3,黏聚力 31.3 kPa,内摩擦角  $11.3^\circ$ .验证结果见图 6,对应的计算参数分别为表 5 和表 6.

表 5 上海软土动剪切模量函数参数值

Table 5 Parameters of dynamic shear modulus function of Shanghai clay

围压/kPa	频率/Hz	参数		
		$G_{\max}$	$N_0$	$p$
200	0.5	30	352	0.45
	1.5	30.2	259	0.66
	2.5	31.6	152	0.49

表 6 上海软土动剪切模量函数参数值

Table 6 Parameters of dynamic shear modulus function of Shanghai clay

围压/kPa	$\sigma_d$ /kPa	参数		
		$G_{\max}$	$N_0$	$p$
200	20	26	97.8	0.46
	30	33	81.5	0.38
	40	51	60.2	0.43

验证结果表明,计算值与试验值吻合很好,动剪切模量函数公式具有较好的适用性,可推广使用.

从图 6 可知:上海软土动剪切模量-振次关系曲线可分为急剧软化阶段和平稳阶段,但是和

南京软土动剪切模量-振次关系曲线相比,南京软土的临界振次界定更明显,并且很快趋于稳定.

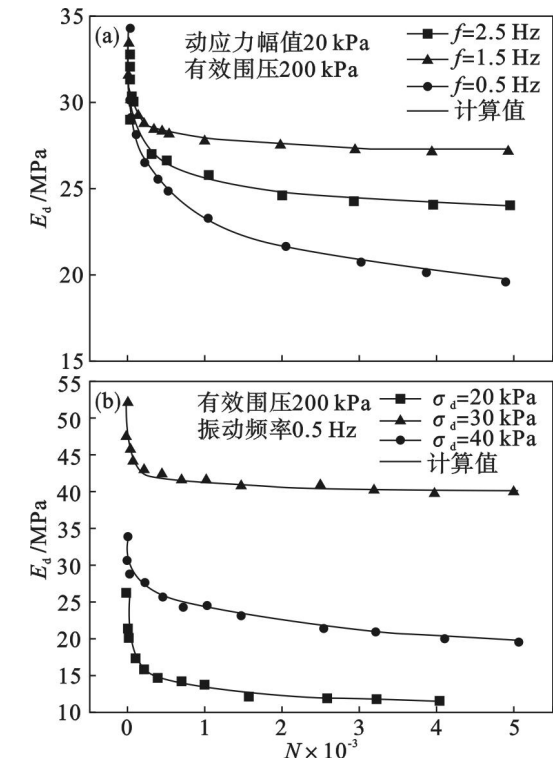


图 6 上海软土不同条件下动弹性模量-振次关系试验与计算值

Fig. 6 Calculated and test values of dynamic elasticity modulus and the number of vibration on different conditions for Shanghai clay

(a) —不同频率; (b) —不同荷载.

目前,地铁现场试验有测加速度法、布置基准点监测土体内部动态孔压和土压力法.依据本文提出的动剪切模量函数公式可以从振次方面来评价软土的动力特性,室内试验也建议研发相应的计算方法与现场结果进行统一.动剪切模量-振次关系曲线,可以推广用于分析地铁移动荷载作用下软土随着振次或时间的动力特性发展规律,进而计算地铁运营阶段产生的附加沉降.

5 结 论

- 1) 对南京软土进行动三轴试验,计算得到初始动剪切模量的试验值和计算值,进行对比分析.通过回归分析对公式进行改进,考虑地铁运营时的重要影响因素——振动频率,从而能更准确地预测初始动剪切模量值.
- 2) 建立了一个动剪切模量-振次关系函数计算公式,提出了稳定动剪切模量的概念.以南京软土为例,从机理上分析围压、动荷载幅值、频率等因素对动剪切模量的影响,同时利用不同地区的软土试验数据进行验证,证明了公式的适用性,

并可推广分析地铁荷载作用下软土随振次变化的动力特性.

### 参考文献:

- [1] Olsson A, Kallsner B. Shear modulus of structural timber evaluated by means of dynamic excitation and FE analysis [J]. *Materials and Structures*, 2015, 48(4): 977–985.
- [2] Kyung J S, Yoo B. Rheological properties of azuki bean starch pastes in steady and dynamic shear [J]. *Starch-Starke*, 2014, 66(9/10): 802–808.
- [3] Shodja H M, Goodarzi A, Delfani M R, et al. Scattering of an anti-plane shear wave by an embedded cylindrical micro-/nano-fiber within couple stress theory with micro inertia [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, 58: 73–90.
- [4] Seed H B, Idriss I M. Soil module and damping factors for dynamic response analysis. EERC, Report No. 70–10 [R]. Berkeley: University of California, Berkeley, 1970.
- [5] Hardin B O, Black W L. Vibration modulus of normally consolidated clay [J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1968, 94(2): 353–370.
- [6] Drnevich V P, Hardin B O, Shippy D J. Modulus and damping of soil by the resonant-column method [M]// *Dynamic Geotechnical Testing: STP654*. [S. l.]: ASTM, 1978.
- [7] Hardin B O, Drnevich V P. Shear modulus and damping in soils: design equations and curves [J]. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division*, 1972, 98(7): 667–692.
- [8] Richart F E. Dynamic stress-strain for soil [C]// *The 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Tokyo, 1977: 605.
- [9] Kagawa T. Moduli and damping factors of soft marine clays [J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1992, 118(9): 1360–1375.
- [10] 沈珠江. 一个计算砂土液化变形的等价黏弹性模式 [C]// *中国土木工程学会第四届土力学及基础工程学术会议论文选集*. 武汉, 1983: 199–207.  
(Shen Zhu-jiang. An equivalent viscoelastic model of calculating sand liquefaction [C] // *Civil Engineering Society the Fourth Discussion Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Wuhan, 1983: 199–207.)
- [11] Zhao H, Ge L. Investigation on the shear moduli and damping ratios of silica gel [J]. *Granular Matter*, 2014, 16(4): 449–456.
- [12] 徐毅青, 唐益群. 地铁振动荷载作用下隧道周围加固软黏土动弹性模量试验 [J]. *工程力学*, 2012(7): 250–255.  
(Xu Yi-qing, Tang Yi-qun. Experimental study on dynamic elastic modulus of reinforcing soft clay around subway tunnel under vibration load [J]. *Engineering Mechanics*, 2012(7): 250–255.)
- [13] Luo J H, Miao L C, Wang Z X, et al. Modified cam-clay model with dynamic shear modulus under cyclic loads [J]. *Journal of Vibroengineering*, 2015, 17(1): 112–124.
- [14] Sas W, Gabrys K, Szymanski A. Effect of time on dynamic shear modulus of selected cohesive soil of one section of express way No. S2 in Warsaw [J]. *Acta Geophysica*, 2015, 63(2): 398–413.
- [15] Yasuhara K, Hyde A F L. Method for estimating post-cyclic undrained secant modulus of clays [J]. *Journal of Geotechnical and Geo-environmental Engineering*, 1997, 123(3): 204–211.

### (上接第 1187 页)

- (Chen Zhong-yu. Study on pretreatment for corn straw and anaerobic co-digestion of corn straw and excess sludge [D]. Tianjin: University of Tianjin, 2010.)
- [8] Flock J, Koch K H. Spectrophotometric determination of Fe (II) and total iron with 2,4,6-TRI (2-pyridyl)-1,3,5-triazine in iron ores and related industrial products [J]. *Fresenius Journal of Analytical Chemistry*, 1993, 346(6/7/8/9): 667–670.
- [9] 王为国, 李自豪, 覃远航, 等. 稻草秸秆超低酸水解及水解产物分析 [J]. *石油化工*, 2013(3): 339–345.  
(Wang Wei-guo, Li Zi-hao, Qin Yuan-hang, et al. Hydrolysis of rice straw with extremely dilute acid and products analysis [J]. *Petrochemical Technology*, 2013(3): 339–345.)
- [10] Pagnanelli F, Furlani G, Valentini P, et al. Leaching of low-grade manganese ores by using nitric acid and glucose: optimization of the operating conditions [J]. *Hydrometallurgy*, 2004, 75(1/2/3/4): 157–167.
- [11] 樊高远. 纤维素产能的热水解与高温发酵耦合技术研究 [D]. 北京: 清华大学, 2012.  
(Fan Gao-yuan. Research on the combination of supercritical/subcritical hydrolysis of cellulose technology and simultaneous hydrogen and ethanol production by extreme thermophiles [D]. Beijing: Tsinghua University, 2012.)