

钢与混凝土组合箱梁剪力滞效应分析

王连广, 万江

(东北大学资源与土木工程学院, 辽宁沈阳 110819)

摘 要: 根据钢与混凝土组合箱形结构翘曲位移函数设置的基本原理, 选择一系列符合组合箱梁基本翘曲模式的抛物线型翘曲位移函数, 以最小势能原理为基础, 得到利用变分法分析钢与混凝土组合箱梁剪力滞效应的控制微分方程和边界条件, 并推导了典型的简支组合箱梁在跨中集中荷载作用下的解析解。静力分析算例结果证明了选择二次抛物线型为翘曲位移函数的合理性和适用性。将解析解与实测结果和有限元计算结果进行比较, 证明了本文方法的有效性。基于能量原理得到的计算公式能够满足工程实际的需要, 且计算较为简单。

关 键 词: 桥梁工程; 组合箱梁; 能量变分原理; 剪力滞效应; 翘曲位移函数; 剪力滞系数

中图分类号: TU 398

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2015)08-1204-05

Analysis of Shear Lag Effect of Steel and Concrete Composite Box Girders

WANG Lian-guang, WAN Jiang

(School of Resources & Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: WAN Jiang, E-mail: neu2936@163.com)

Abstract: Based on the basic principle of warping displacement function setting, a series of parabolic warping displacement functions that meet the basic warping mode of concrete composite box girders were selected for the proposed approach. The energy variation principle was applied to establish the governing differential equations and corresponding natural boundary conditions in consideration of the effect of shear lag. Then the analytical solutions to typical simply supported composite girders under mid-span concentrated load were derived. The static calculation examples verified the rationality and applicability of selecting quadratic parabolic warping displacement functions. Meanwhile, the measured results and the analytical solutions were compared with the finite element calculations so as to confirm the effectiveness of the approach. The calculation formula based on energy principle can meet the practical needs in engineering and the calculation is simple.

Key words: bridge engineering; steel and concrete composite box girder; energy variation principle; shear lag effect; warping displacement function; shear lag coefficient

钢与混凝土组合箱梁是由钢箱梁与混凝土板通过剪力连接件组合起来的一种新型结构形式。这种结构形式具有构件截面尺寸小、承载力高、动力性能和抗震性能好等优点, 因而得到广泛应用。在外荷载作用下, 混凝土箱型梁和钢箱梁的翼板应力沿宽度分布不均匀的现象称为剪力滞效应。忽略剪力滞效应会导致结构不安全^[1-2], 但是目前, 针对钢与混凝土组合箱梁的剪力滞效应研究

比较少见^[3-4]。为此, 本文对钢与混凝土组合箱梁剪力滞效应进行了理论分析和求解, 利用能量法和应用最小势能原理^[5], 建立了钢与混凝土组合箱梁剪力滞效应的控制微分方程, 给出了组合箱梁考虑剪力滞效应的应力计算公式, 同时建立了典型的简支组合箱梁在跨中集中荷载作用下考虑剪力滞效应的应力计算公式。

收稿日期: 2014-06-29

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N120401010)。

作者简介: 王连广(1964-), 男, 辽宁鞍山人, 东北大学教授, 博士生导师。

1 控制微分方程

根据钢与混凝土组合箱梁的结构特点, 在应用能量法研究其剪力滞效应时, 采用以下基本假定: ①钢与混凝土均为各向同性的弹性体; ②组合梁受弯时, 混凝土与钢翼板纵向正应变符合线性规律, 即符合平截面假定; ③在竖向对称荷载作用下, 组合箱梁横截面中性轴位于按初等梁理论计算的换算截面形心轴的位置; ④混凝土与钢翼板的竖向应变与横向应变、板平面外剪切应变均属微量应变, 可忽略不计; ⑤考察剪力滞效应对组合梁受力行为的影响时忽略界面滑移效应的影响^[6], 对抛物线型翘曲位移函数进行轴力平衡的修正是没有必要的^[7]; ⑥不考虑普通钢筋对混凝土翼板刚度的影响, 混凝土弹性模量为常数。

在剪力滞效应的分析中, 为简化计算, Reissner^[8]假定翼板的纵向位移为二次型函数, 把三维结构转化为梁的问题进行解析。近年来, 也有一些研究者指出, 用三次或四次型甚至是五次或六次型的高次位移函数代替 Reissner 的二次型可以进一步改善计算精度^[9]。但是, 考虑到无论是三次型、四次型还是其他高次型位移函数, 其算法与二次型位移函数并无区别, 故这里不妨取任意的 n 次型函数来进行讨论。对称竖向荷载作用下的典型组合箱梁结构截面形式见图 1。

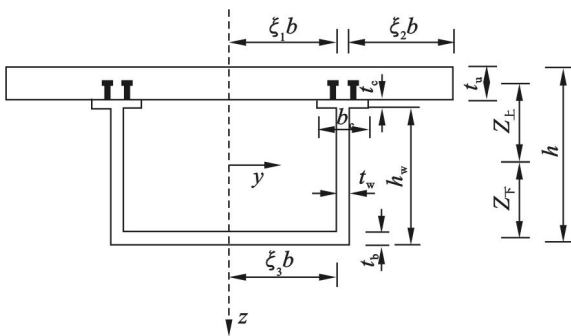


图 1 钢与混凝土组合箱梁截面尺寸示意图

Fig. 1 Section size diagram of steel and concrete composite box girder

由上可以得到钢与混凝土组合箱梁基于剪切变形规律的剪力滞翘曲位移函数: $u_1(x, y)$ (混凝土顶板), $u_2(x, y)$ (混凝土悬臂板), $u_3(x, y)$ (钢底板)。

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y) &= -Z_{\pm} \left\{ \frac{dw}{dx} + \left[1 - \frac{\bar{y}^n}{(\xi_1 b)^n} \right] u(x) \right\} \\ u_2(x, y) &= -Z_{\pm} \left\{ \frac{dw}{dx} + \left[1 - \frac{\bar{y}^n}{(\xi_2 b)^n} \right] u(x) \right\} \\ u_3(x, y) &= Z_{\mp} \left\{ \frac{dw}{dx} + \left[1 - \frac{\bar{y}^n}{(\xi_3 b)^n} \right] u(x) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $u(x)$ 为翼板剪切变形所引起的翼板纵向最大位移差函数; $Z_{\pm(\text{下})}$ 分别为上、下翼板的中面距箱梁换算截面形心轴的距离; ξ_2, ξ_1, ξ_3 为悬臂板及上、下翼板宽度修正系数; b 为翼板箱梁净宽的一半; n 为抛物线次数, 通常取 2, 3, 4, 5, 6。

体系的总势能包括外荷载势能 \bar{V} 及形变势能 \bar{U} 。根据最小势能原理, 在外荷载作用下, 处于平衡状态的弹性体在满足边界条件的所有位移中, 存在一组位移能使整个体系的总势能最小, 即结构在外荷载作用下处于平衡状态时, 对于任何虚位移体系总势能的一阶变分为零, 即 $\delta\Pi = \delta(\bar{U} + \bar{V}) = 0$ 。

体系总势能为

$$\begin{aligned} \Pi &= \bar{V} + \bar{U}_w + \bar{U}_{su} + \bar{U}_{sb} = \\ &\int_0^l M(x) w'' dx + \frac{1}{2} \int_0^l (E_s I_{sw} + E_c I_{cw}) w''^2 dx + \\ &\frac{1}{2} \int_0^l E_c \left[I_{su} w''^2 + \frac{2n I_{su} w'' u'}{n+1} + \frac{2n^2 I_{su} u'^2}{(2n+1)(n+1)} + \right. \\ &\left. \frac{n^2 G_c I_{s1} u^2}{(2n-1) E_c b^2} \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^l E_s \left[I_{sb} w''^2 + \frac{2n I_{sb} w'' u'}{n+1} + \right. \\ &\left. \frac{2n^2 I_{sb} u'^2}{(2n+1)(n+1)} + \frac{n^2 G_s I_{s2} u^2}{(2n-1) E_s b^2} \right] dx. \quad (2) \end{aligned}$$

式中: I_{su} 为混凝土上翼板除去腹板区混凝土后忽略翼板自身惯性矩时对截面形心轴的惯性矩, $I_{su} = I_{su1} + I_{su2}$; I_{s1} 为混凝土翼板广义惯性矩, $I_{s1} = I_{su1}/\xi_1^2 + I_{su2}/\xi_2^2$; I_{s2} 为钢翼板广义惯性矩, $I_{s2} = I_{sb}/\xi_3^2$; $I_{su1} = 2t_u \xi_1 b Z_{\pm}^2$; $I_{su2} = 2t_u \xi_2 b Z_{\pm}^2$; $I_{sb} = 2t_b \xi_3 b Z_{\mp}^2$; G 和 E 分别为剪切模量和弹性模量, 下标 s 和 c 分别代表钢和混凝土。

根据变分原理, 由最小势能原理有 $\delta\Pi = 0$, 采用分部积分法得到基本微分方程与边界条件:

$$\left. \begin{aligned} M(x) + (E_c I_c + E_s I_s) w'' + \frac{n}{n+1} (E_c I_{su} + E_s I_{sb}) u' &= 0, \\ \frac{n^2 u (G_c I_{s1} + G_s I_{s2})}{(2n-1) b^2} - E_c \left[\frac{n I_{su} w'''}{n+1} + \frac{2n^2 I_{su} u''}{(2n+1)(n+1)} \right] - \\ E_s \left[\frac{n I_{sb} w'''}{n+1} + \frac{2n^2 I_{sb} u''}{(2n+1)(n+1)} \right] &= 0, \\ \left\{ E_c I_{su} \left[\frac{n w''(0)}{n+1} + \frac{2n^2 u'(0)}{(2n+1)(n+1)} \right] + \right. \\ E_s I_{sb} \left[\frac{n w''(0)}{n+1} + \frac{2n^2 u'(0)}{(2n+1)(n+1)} \right] \Big\} (0) &= 0, \\ \left\{ E_c I_{su} \left[\frac{n w''(l)}{n+1} + \frac{2n^2 u'(l)}{(2n+1)(n+1)} \right] + \right. \\ E_s I_{sb} \left[\frac{n w''(l)}{n+1} + \frac{2n^2 u'(l)}{(2n+1)(n+1)} \right] \Big\} (l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)中前两式为经过变分得到的考虑剪力滞效应的基本微分方程,后两式为变分所要求的边界条件.

将式(3)中第一式微分一次后与第二式合并消去 w''' , 整理得

$$u'' - k^2 u = \frac{(2n+1)}{2n} \cdot \frac{gQ(x)}{(E_c I_c + E_s I_s)}. \quad (4)$$

$$\text{式中, } g = \frac{1}{1 - \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \frac{(E_c I_{su} + E_s I_{sb})}{(E_c I_c + E_s I_s)}},$$

$$k = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{(2n^2 + 3n + 1)g(G_c I_{s1} + G_s I_{s2})}{(4n-2)(E_c I_{su} + E_s I_{sb})}}.$$

式(4)即为利用变分法分析钢与混凝土组合箱梁剪力滞效应所得到的位移函数控制微分方程.

2 典型边界条件下解析解

以下仅给出简支组合箱梁承受跨中集中荷载作用下的解析解. 其他典型边界条件下的解析解可以采用类似方法得到.

简支组合箱梁上承受集中荷载 P 作用, 见图 2.

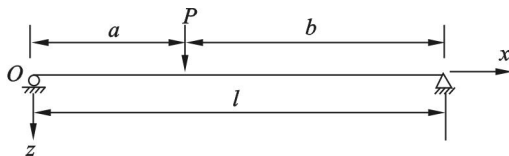


图 2 承受集中荷载的简支梁
Fig. 2 Simply supported girder under concentrated load

梁上任意截面弯矩与剪力可表示为分段函数:

$$\text{当 } 0 \leq x \leq a, \xi = \frac{b}{l} \text{ 时,}$$

$$M_1(x) = \frac{b}{l} Px = \xi Px, Q_1(x) = \frac{b}{l} P = \xi P. \quad (5)$$

$$\text{当 } a < x \leq l, \eta = \frac{a}{l} \text{ 时,}$$

$$M_2(x) = (a - \eta x) Px, Q_2(x) = -\eta P. \quad (6)$$

把式(5)和式(6)分别代入式(4)后, 得到分析剪力滞效应的控制微分方程为

$$\left. \begin{aligned} u_1'' - k^2 u_1 &= \frac{(2n+1)}{2n} \cdot \frac{g\xi P}{(E_c I_c + E_s I_s)}, 0 \leq x \leq a; \\ u_2'' - k^2 u_2 &= -\frac{(2n+1)}{2n} \cdot \frac{g\eta P}{(E_c I_c + E_s I_s)}, a < x \leq l. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

方程的解为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{(2n+1)gP}{2n(E_c I_c + E_s I_s)} \left(C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx - \frac{\xi}{k^2} \right), 0 \leq x \leq a; \\ u_2 &= \frac{(2n+1)gP}{2n(E_c I_c + E_s I_s)} \left(C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx + \frac{\eta}{k^2} \right), a < x \leq l. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由简支组合箱梁的受力分析可知边界条件为

$$u_1'|_{x=0} = 0, u_2'|_{x=l} = 0.$$

在 $x = a$ 处的变形连续条件为 $u_1|_{x=a} = u_2|_{x=a}$,

以及变分要求在 $x = a$ 点,

$$\left(u_1' - \frac{(2n+1)gM_1(x)}{2n(E_c I_c + E_s I_s)} \right) \Big|_{x=a} - \left(u_2' - \frac{(2n+1)gM_2(x)}{2n(E_c I_c + E_s I_s)} \right) \Big|_{x=a} = 0.$$

根据以上 4 个边界条件与连续条件, 可得到

$$\text{各参数值为: } C_1 = 0, C_2 = \frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{k^2 \operatorname{sh} kl},$$

$$C_3 = \frac{\operatorname{sh} ka}{k^2}, C_4 = -\frac{\operatorname{sh} ka}{k^2 \operatorname{th} kl}.$$

继而得到剪力滞位移计算公式:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{(2n+1)gP}{2n(E_c I_c + E_s I_s)k^2} \left(\frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{ch} kx - \frac{b}{l} \right), \\ &0 \leq x \leq a; \\ u_2 &= \frac{(2n+1)gP}{2n(E_c I_c + E_s I_s)k^2} \left(\operatorname{sh} ka \cdot \operatorname{sh} kx - \frac{\operatorname{sh} ka}{\operatorname{th} kl} \times \right. \\ &\quad \left. \operatorname{ch} kx + \frac{a}{l} \right), a < x \leq l. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

得到 u_1, u_2 计算公式后, 可求得各段应力函数:

在 $0 \leq x \leq a$ 段,

$$\sigma_{xi} = \mp \frac{E_{c(s)} Z_{\pm(\mp)}}{E_c I_c + E_s I_s} \left\{ M(x) - \frac{(2n+1)gP}{2nk} \times \left[\left(1 - \frac{\bar{y}^n}{(\xi_i b)^n} \right) - \frac{n(E_c I_{su} + E_s I_{sb})}{(n+1)(E_c I_c + E_s I_s)} \right] \times \left[\frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kx \right] \right\} \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

在 $a < x \leq l$ 段,

$$\sigma_{xi} = \mp \frac{E_{c(s)} Z_{\pm(\mp)}}{E_c I_c + E_s I_s} \left\{ M(x) - \frac{(2n+1)gP}{2nk} \times \left[\left(1 - \frac{\bar{y}^n}{(\xi_i b)^n} \right) - \frac{n(E_c I_{su} + E_s I_{sb})}{(n+1)(E_c I_c + E_s I_s)} \right] \times (\operatorname{sh} ka \cdot \operatorname{ch} kx - \operatorname{sh} ka \cdot \operatorname{coth} kl \cdot \operatorname{sh} kx) \right\} \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

3 算例分析

为验证能量法公式的合理性以及采用文中给出的位移函数求得的剪力滞情况, 将前述的能量法理论计算结果与有限元仿真结果和文献[10]实测结果进行比较. 本文的有限元仿真采用 ABAQUS 建立有限元模型, 钢箱梁、混凝土板采用

实体单元模拟,钢箱梁和混凝土板之间采用界面弹簧模拟剪力连接件.实验组合箱梁的截面尺寸及测点布置见图 3 和图 4,梁总长 3 000 mm,计算跨径为 2 800 mm,混凝土板厚度 76 mm,钢底板及钢腹板厚度 8 mm.混凝土翼板 $E_c=0.298 \times 10^5$ MPa,泊松比 $\mu_c=0.2$,钢底板 $E_s=2.01 \times 10^5$ MPa,泊松比 $\mu_s=0.3$.下面给出简支钢与混凝土组合箱梁

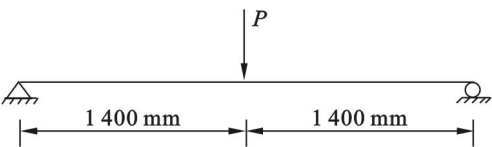


图 3 跨度及荷载
Fig. 3 Span and load

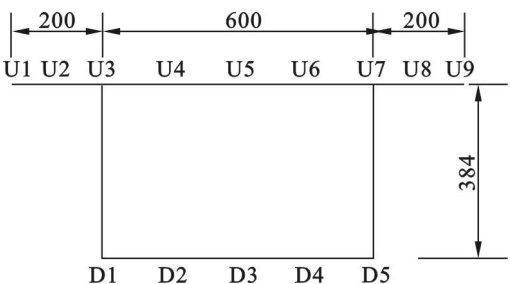


图 4 实验梁截面尺寸及测点布置(单位:mm)
Fig. 4 Section size and test point arrangement of experimental girder(unit:mm)

表 1 简支钢与混凝土组合箱梁模型应力比较

Table 1 Comparison of stresses in simply supported steel and concrete composite box girder model

测点编号	实测值 ^[10] /MPa	本文计算值/MPa					有限元计算值 /MPa	n=2 计算值与有 限值误差率/%
		n=2	n=3	n=4	n=5	n=6		
U ₁	-1.92	-1.92	-2.02	-2.09	-2.14	-2.17	-1.95	1.53
U ₂	-2.07	-2.22	-2.17	-2.16	-2.17	-2.18	-2.17	2.30
U ₃	-2.94	-3.13	-3.20	-3.22	-3.22	-3.21	-2.99	4.68
U ₄	-1.94	-2.22	-2.17	-2.16	-2.17	-2.18	-1.98	2.02
U ₅	-1.83	-1.92	-2.02	-2.09	-2.14	-2.17	-1.90	3.68
U ₆	-1.94	-2.22	-2.17	-2.16	-2.17	-2.18	-1.98	2.02
U ₇	-2.94	-3.13	-3.20	-3.22	-3.22	-3.21	-2.99	4.68
U ₈	-2.07	-2.22	-2.17	-2.16	-2.17	-2.18	-2.17	2.30
U ₉	-1.92	-1.92	-2.02	-2.09	-2.14	-2.17	-1.95	1.53
D ₁	31.8	38.11	38.92	39.16	39.18	39.08	33.8	12.70
D ₂	25.6	27.02	26.40	26.28	26.38	26.56	27.6	2.10
D ₃	24.2	23.33	24.62	25.42	25.97	26.36	23.9	2.38
D ₄	25.6	27.02	26.40	26.28	26.38	26.56	27.6	2.10
D ₅	31.8	38.11	38.92	39.16	39.18	39.08	33.8	12.70

按本文方法计算的跨中截面各测点处应力计算值、文献[10]提供的实测值及本文有限元的分析计算值,一并列入表 1 中,以便比较.由表 1 可知,按本文方法计算的结果与实测结果及有限元计算值总体上吻合良好.同时,由表 1 中数据比较

知,翘曲函数精度较高的函数为二次抛物线,与文献[10]实测值及有限元分析的计算值吻合最好,故本文建议选择二次抛物线作为分析钢与混凝土组合箱梁的翘曲函数.

图5给出了跨中集中荷载 $P=80$ kN 作用下

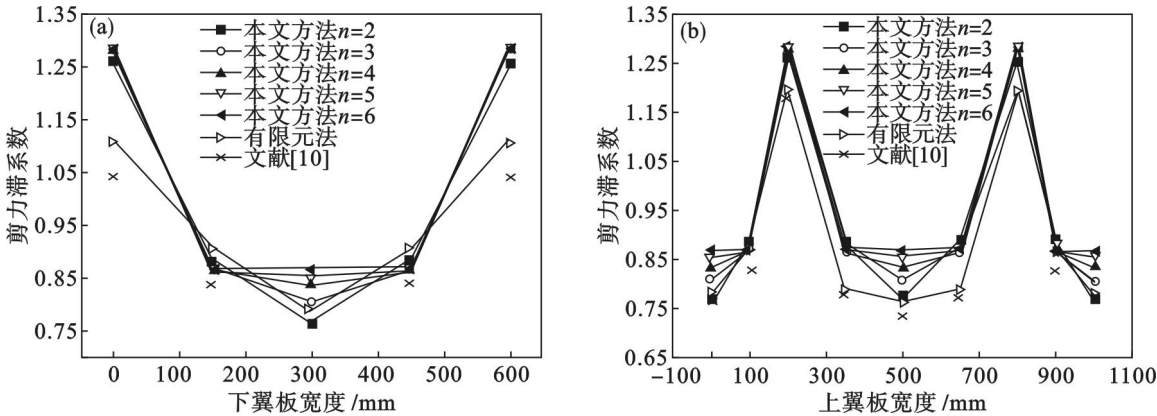


图 5 简支组合箱梁在集中荷载作用下翼板的剪力滞系数曲线
Fig. 5 Shear lag coefficient curve of flange plates in simply supported steel and concrete composite box girder under concentrated load

(a)—钢翼板;(b)—混凝土翼板.

(下转第 1216 页)