

# 弥散裂缝模型水力压裂数值方法的网格敏感性分析

李明<sup>1,2</sup>, 梁力<sup>1</sup>, GUO Pei-jun<sup>2</sup>, 李鑫<sup>1</sup>

(1. 东北大学资源与土木工程学院, 辽宁沈阳 110819; 2. 麦克马斯特大学土木工程系, 安大略哈密尔顿 L8S4L8)

**摘要:** 在非线性岩土/石力学问题中, 网格质量是影响计算结果的一个重要因素. 本文分析了弥散裂缝模型水力压裂数值求解方法中单元高宽比 (AR) 对计算结果的影响. 材料的弹性部分采用线弹性和多孔弹性两种本构关系, 屈服和破坏准则采用 Drucker - Prager (DP) 和 Mohr - Coulomb (MC) 两种模型. 通过综合分析, 无论采用何种本构关系, 均存在网格敏感性问题. 当裂缝的传播方向已知时, 可以将单元的 AR 值控制在 2.8 ~ 8.0 之间, 以避免弥散裂缝模型的网格敏感性问题, 并得到稳定的结果. 如果裂缝传播方向未知, 建议使用线弹性本构关系和 DP 或者 MC 塑性模型, 同时建议 AR 的取值为 1.0.

**关键词:** 网格敏感性; 水力压裂; 弥散裂缝模型; 单元高宽比 (AR); 有限单元法

中图分类号: TV 139.1; TE 31 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2015)09-1337-05

## Mesh Sensitivity Analysis of the Solution to Hydraulic Fracture Problems Based on a Smeared Crack Model

LI Ming<sup>1,2</sup>, LIANG Li<sup>1</sup>, GUO Pei-jun<sup>2</sup>, LI Xin<sup>1</sup>

(1. School of Resources & Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Department of Civil Engineering, McMaster University, Hamilton L8S4L8, Canada. Corresponding author: LI Ming, E-mail: liming@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** Mesh quality is an important factor that affects the simulation results in nonlinear soil/rock mechanic problems. The effect of aspect ratio of element (AR) on calculation was analyzed in numerical solution of hydraulic fracture for the smeared crack model. Elasticity was measured by adopting the porous elastic (PE) and linear elastic (LE) constitutive models. Regarding to material yielding and failure, both the Drucker-Prager (DP) and Mohr-Coulomb (MC) models were considered. Based on a comprehensive analysis, it is concluded that no matter which constitutive model is adopted, there always exists mesh sensitivity. If the direction of fracture propagation is known, the AR should be between 2.8 and 8.0 to obtain stable results. If the direction is unknown, it is recommended that the LE constitutive model as well as the MC/DP plasticity model should be used together with the AR equal to 1.0.

**Key words:** mesh sensitivity; hydraulic fracture; smeared crack model; aspect ratio of element (AR); finite element method

水力压裂 (hydraulic fracture, 又称为水力劈裂、水力裂解技术) 是开采页岩气时所用的方法, 也是油气井增产的主要措施<sup>[1]</sup>. 水力压裂的数值计算方法及模型有多种, 如弥散裂缝模型<sup>[2]</sup>、双孔隙度模型<sup>[3]</sup>、分离裂缝模型<sup>[3]</sup>、粘结模型<sup>[4-5]</sup>、扩展有限元法<sup>[6-7]</sup>等. 基于断裂力学理论

的模型有 PKN, PKN - C, KGD, KGD - C, P - 3D 和 P - 3D - C 等<sup>[1,8]</sup>. 弥散裂缝模型是通过修改破坏区域的材料特性 (如: 刚度、渗透系数等) 实现裂缝发展过程的模拟, 无需引入真正的裂缝和重构网格, 适用于岩石材料的拉伸破坏和土体材料的剪切破坏过程的模拟<sup>[2-3]</sup>. 但当采用此法进行数值

收稿日期: 2014-07-14

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (N110301001); 国家自然科学基金资助项目 (51474048); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (20120042110001).

作者简介: 李明 (1980-), 男, 辽宁沈阳人, 东北大学讲师, 麦克马斯特大学博士后研究人员; 梁力 (1955-), 男, 辽宁丹东人, 东北大学教授, 博士生导师; GUO Pei-jun (1966-), 男, 河南林州人, 麦克马斯特大学终身教授, 博士生导师.

计算时, Bazant<sup>[9-10]</sup> 等指出网格的形状会影响计算结果, 即网格敏感性. 本文通过对比不同本构关系和有限元网格的单元高宽比 (AR) 对水力压裂问题中垂直裂缝开裂区域的数值计算结果, 分析并探讨了如何回避网格敏感性问题的.

## 1 水力压裂数值计算的弥散裂缝模型

### 1.1 基本方程

本文所采用的弥散裂缝模型是基于完全流-固耦合的弹塑性理论, 其主要控制方程如下:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (1)$$

$$\frac{\kappa \rho g}{\mu} \nabla^2 p = \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (3)$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}; \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p \delta_{ij}; \quad (5)$$

$$\kappa(\sigma_m, p) = k_0 f[-\beta(\sigma_m - \alpha p)] + C_0. \quad (6)$$

其中:  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma'_{ij}$  和  $p$  分别为总应力张量、有效应力张量和流体压力 (本文为水压力);  $\delta_{ij}$  是 Kronecker 张量;  $\rho$  是密度;  $u_i$  和  $f_i$  分别是方向  $x_i$  上的位移和体力;  $\varepsilon_{ij}$  和  $\varepsilon_v = u_{i,i}$  代表应变张量和体积应变; 材料的弹性特性分别由拉梅常数  $\lambda$  (体积模量) 和  $G$  (剪切模量) 表示; 材料的塑性部分通过 Drucker-Prager (DP) 和 Mohr-Coulomb (MC) 破坏和强化准则来描述; 变量  $\alpha$  和  $1/Q$  分别表示 Boit 固结系数和存储系数; 方程  $\kappa(\sigma_m, p)$  用来描述破坏后渗透系数与有效平均应力之间的关系;  $k_0$  和  $C_0$  为与渗透系数初值和最大值相关的常量;  $\beta$  为损伤系数.

### 1.2 渗透系数修改模型

ABAQUS 软件中, 渗透系数又称水力传导系数 (hydraulic conductivity), 在各向同性介质中, 它被定义为单位水力梯度下的单位流量, 表示流体通过孔隙骨架的难易程度, 其单位为 m/s. 本文通过修改渗透系数的数值模拟破坏岩石中流体的流动. 结合文献 [11-12] 中关于渗透系数的修改法, 本文所采取的渗透系数  $k$  的修改方式是通过式 (7) 实现的, 其中系数  $h$  表示有效平均应力  $\sigma'_m$  的双曲正切函数如式 (8) 所示, 材料的抗拉强度  $P_t$  的单位是 MPa.

$$k = \frac{1+h}{2} k^{UB} + \frac{1-h}{2} k_0, \quad (7)$$

$$h = \tanh[\xi(\sigma'_m - P_t)]. \quad (8)$$

式中:  $k_0$  和  $k^{UB}$  分别为岩石材料的初始渗透系数和渗透系数上限 (本文假设  $k^{UB} \gg k_0$ , 取值  $k^{UB} = 0.1 \text{ m/s}$ ); 系数  $\xi$  是影响双曲正切函数变化的一个指标, 不同  $\xi$  取值下的渗透系数变化如图 1 所示. 起裂时的有效平均应力大小可以通过调整  $\xi$  的取值来控制. 当系数  $\xi$  较小时, 渗透系数  $k$  的修正会提前; 相反当系数  $\xi$  较大时, 渗透系数  $k$  的修正滞后, 即相同  $\Delta\sigma = (\sigma_m - P_t)$  会导致较大的渗透系数修正. Brace 等<sup>[13]</sup> 认为岩石材料的起裂应力为其抗拉强度的 0.35~0.6 倍, 因此在进行数值计算时, 系数  $\xi$  的取值应使起裂压力约为  $(0.35 \sim 0.6) P_t$ .

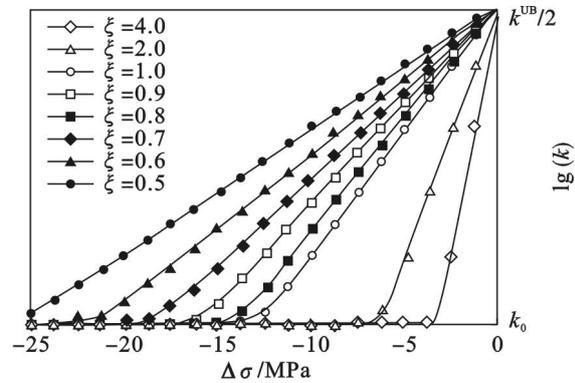


图 1 不同  $\xi$  取值下的渗透系数变化曲线  
Fig. 1 Modification of permeability with different  $\xi$

## 2 弥散裂缝模型在 ABAQUS 中实现

水力压裂的数值分析软件的国内代表有基于渗流应力耦合的 RFPA<sup>2D</sup> 软件<sup>[14]</sup>. 而本文采用 ABAQUS 软件的用户自定义子程序实现水力压裂的数值计算功能. 在该软件中材料参数可以设置为场变量 (field variable) 函数. 在求解之前可以通过子程序 SDVINI 设计材料分布情况并初始化状态变量 (state variable), 而后通过子程序 USDFLD 在计算过程中根据状态变量更新场变量的数值实现材料参数随着积分点位置变化而变化. 程序中共考虑 8 个场变量, 依次为: 弹性模量、泊松比、抗拉强度、渗透系数、密度、孔隙比、饱和度和混合黏滞系数, 用于描述材料特性和渗透系数的计算.

## 3 影响网格敏感性的原因

文献 [3] 指出, 在弥散裂缝模型中存在网格敏感性和收敛问题. 这个问题产生主要是由不准

确的破坏模型的零能耗引起的<sup>[9]</sup>。目前的主要解决方法是添加一个位置限制器<sup>[15]</sup>，常用的有：非局部连续体模型<sup>[9]</sup>、裂缝带模型<sup>[10,16]</sup>、特征值长度法<sup>[17-18]</sup>等。

考虑本文所使用的方法是在求解过程中通过提高岩石材料的渗透系数实现流体在破坏岩石中的流动，属于一种弥散裂缝模型，因此同样存在网格敏感性问题。在不增加数值计算量的条件下，本文探讨单元高宽比（AR）与本构关系的选取对计算结果的影响，其中材料的弹性部分采用线弹性（LE）和多孔弹性（PE），材料的屈服和破坏采用 Drucker - Prager（DP）和 Mohr - Coulomb（MC）两种模型。通过三组算例进行验证：1）PE - DP；2）LE - DP；3）LE - MC。每种组合方式的 AR 取值范围是 0.1 ~ 19。

### 4 网格敏感性对比

#### 4.1 材料参数选取

为了简化计算，算例中的材料参数均为常量，各参数取值如表 1 所示。

表 1 材料参数  
Table 1 Material parameters

参数名称	取值	参数名称	取值
杨氏模量/MPa	4 063	抗拉强度/MPa	13.8
对数体积模量	0.005	渗透系数/(mm·s <sup>-1</sup> )	5 × 10 <sup>-7</sup>
泊松比	0.33	孔隙率	0.06
摩擦角/(°)	30	通量率/(mm·s <sup>-1</sup> )	1 × 10 <sup>-3</sup>
膨胀角/(°)	30	注水时间/s	3 600

#### 4.2 力学模型及有限网格划分

算例根据如图 2 所示力学模型建立有限元模型及网格划分。注水点位于模型中间 A 点处，宽度为 1 mm，注水时间为 1 h。模型长度和宽度分别为 101 mm 和 101 mm，周围分别受水压力 P<sub>w</sub>、垂直压应力 P<sub>y</sub> 和水平压应力 P<sub>x</sub> 作用，数值分别为

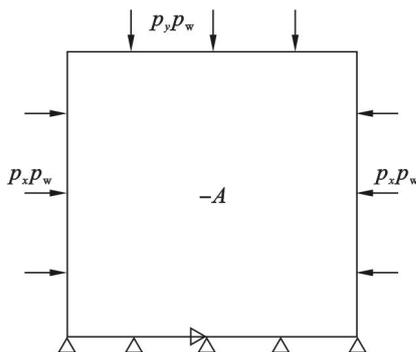


图 2 力学模型  
Fig. 2 Mechanical model

10.34, 29.13 和 29.13 MPa。所采用的单元的多种 AR 取值以及单个有限元网格形状如图 3 所示，其中 4 种典型 AR 取值下的有限元网格图列于图 4 中。

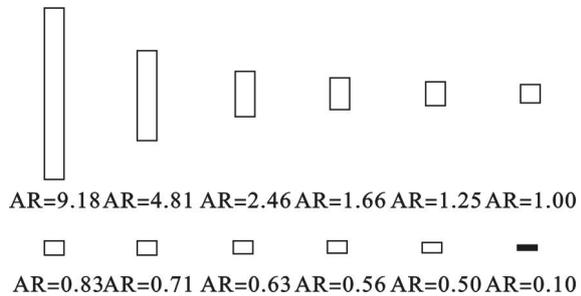


图 3 相同注水宽度不同 AR 取值下的单元形状  
Fig. 3 Element shape under different ARs with the same width of injection line

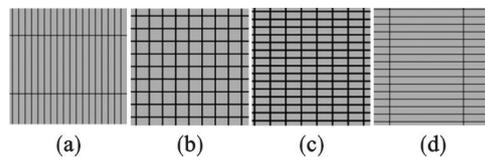


图 4 典型 AR 下的有限元网格  
Fig. 4 FEM mesh under typical ARs  
(a) — AR = 9.18; (b) — AR = 1.00;  
(c) — AR = 0.50; (d) — AR = 0.10.

#### 4.3 数值计算结果及对比分析

为了描述水力压裂开裂区域的基本特性，本文考虑三种典型裂缝特征：1）水力压裂裂缝的垂直影响范围，即裂缝高度（H）；2）水力压裂裂缝的水平影响范围，即裂缝宽度（W）；3）水力压裂裂缝的形状比率，即裂缝高宽比（H/W）。相同注水时间下，三种本构关系组合（PE - DP, LE - DP 和 LE - MC）情况下，如图 3 所示的 AR 取值的典型 12 种工况下的水力压裂裂缝分布分别如图 5 ~ 图 7 所示。从图 5 可以看出，采用 PE - DP 组合，当 AR < 4.8 时，水力压裂的分布区域均不同，且开裂区域不稳定，而当单元高宽比 AR = 0.1（见图 5a）时，数值计算的收敛性也受到影响。

采用 LE - DP 的本构关系组合时，计算结果有了明显改善，如图 6 所示。当 AR ≥ 0.56 时，水力压裂的传播高度基本一致，而开裂宽度在 AR ≤ 2.46 时不尽相同。当 AR = 0.1 时，数值计算不收敛。

采用 LE - MC 的本构关系组合时，在 AR ≥ 1.0 时，如图 7 所示，计算结果中水力压裂的传播高度基本一致。在 AR < 1.0 时，水力压裂的计算区域出现分岔等不稳定情况，虽然 AR = 0.1 时数值计算可以收敛，但其开裂方向却受到网格形状

的控制而沿着水平方向(即单元的长边方向)发展.

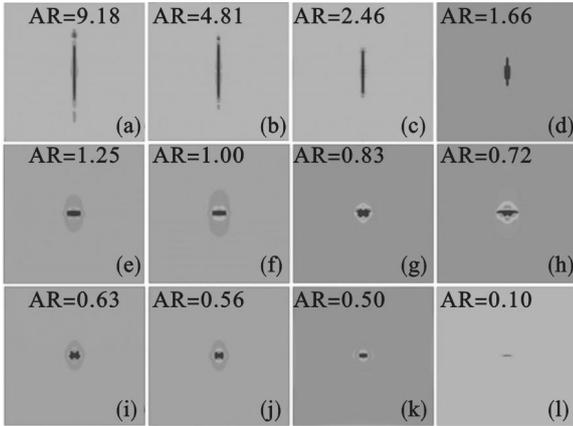


图 5 水力压裂破坏区域 (PE - DP)  
Fig. 5 Hydraulic fracture zones (PE-DP)

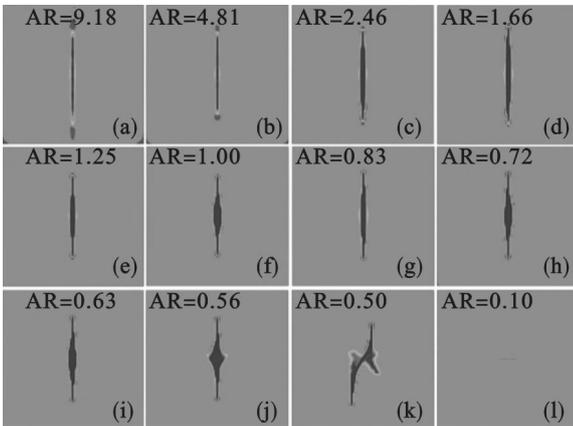


图 6 水力压裂破坏区域 (LE - DP)  
Fig. 6 Hydraulic fracture zones (LE-DP)

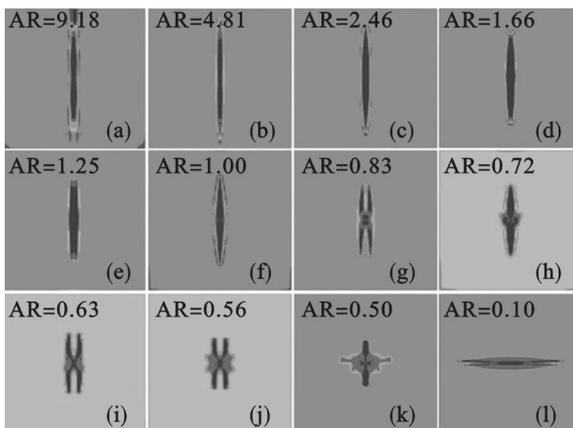


图 7 水力压裂破坏区域 (LE - MC)  
Fig. 7 Hydraulic fracture zones (LE-MC)

图 8 ~ 图 10 为 3 种本构关系组合情况下, AR 取值在 0.1 ~ 19 共 67 种工况下的裂缝开裂区域特性对比. 可见, 当采用 PE - DP 组合(图 8),  $AR < 2.8$  时, 开裂区域的高度、宽度变化极其不稳定. 当  $AR \geq 2.8$  时, 裂缝高度在平均值上下波动. 当采用 LE - DP 组合(图 9),  $AR \geq 2.6$  时, 裂

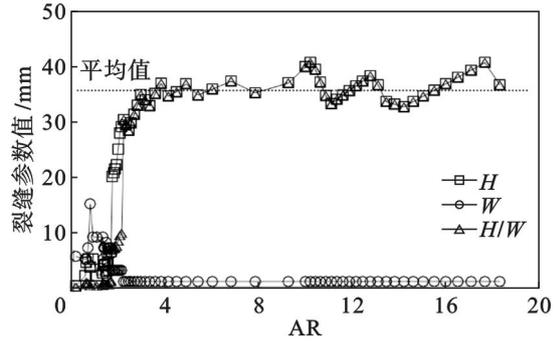


图 8 水力压裂特性 (PE - DP)  
Fig. 8 Features of hydraulic fracture zones (PE-DP)

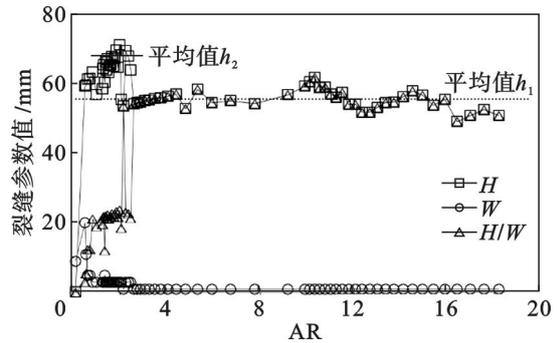


图 9 水力压裂特性 (LE - DP)  
Fig. 9 Features of hydraulic fracture zones (LE-DP)

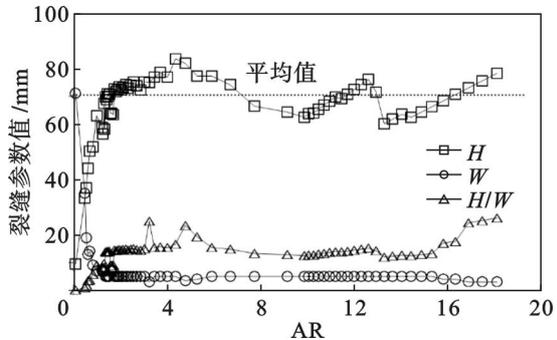


图 10 水力压裂特性 (LE - MC)  
Fig. 10 Features of hydraulic fracture zones (LE-MC)

缝高度维持在  $h_1$  上下波动. 当  $0.5 < AR < 2.6$  时, 开裂区域的高度在平均值  $h_2$  上下浮动, 且  $h_2 > h_1$ . 而对于图 10 所示的 LE - MC 的本构关系组合, 当  $AR \geq 1.0$  时, 裂缝高度在某一平均值上下波动. 在  $AR < 1.0$  时, 计算的开裂区域不稳定, 如出现图 7 所示的分岔等特征.

裂缝高度随着 AR 值的增加波动范围增大, 因为在保持单元宽度相同时, AR 值的增加导致单元高度增加. 降低了裂缝高度数据的提取精度, 进而引起裂缝高度的波动. 当采用 PE - DP 组合, 出现不稳定的裂纹发展较早 ( $AR < 2.8$ ), 这是由于渗透系数修改的耦合项和多孔介质弹性本构关

系的非线性影响,而采用线弹性本构关系则减少了一个耦合因素,因此对于 LE - DP/MC 组合,当  $AR < 1$  时才开始出现不稳定. 由于渗透系数耦合项的存在网格敏感性是不能回避的.

此外,对于不同的本构关系组合存在着不同的合适 AR 取值. 对于 PE - DP 的本构关系组合,当  $AR > 2.8$  时可以得到稳定结果,但裂缝的发展受单元形状影响,对于已知裂缝开裂方向的工程问题可以控制网格的长边方向平行于开裂方向;对于 LE - DP/MC 的本构关系组合,当  $AR \geq 1$  时即可以得到稳定的裂缝高度. 当  $AR = 1$  时,可以认为网格形状不影响裂缝发展方向,所以对于未知开裂方向的工程问题建议控制 AR 为 1 较为合适. 对于已知裂缝开裂方向的工程问题,当采用 PE - DP 组合时,建议 AR 的取值范围是 2.8 ~ 10.0; 当采用 PE - DP/MC 组合时,建议 AR 的取值范围是 1.0 ~ 8.0.

## 5 结 论

1) 通过大量数值计算结果的对比分析可知,无论采用何种本构关系的组合,均不能完全回避弥散裂缝模型中的网格敏感性问题.

2) 对于已知水力压裂裂缝传播方向的工程问题可以通过恰当地控制单元高宽比 AR 的取值得到稳定的开裂区域. 当采用 PE - DP, LE - DP 和 LE - MC 的本构关系组合时,建议 AR 临界值范围依次为 2.8 ~ 10.0, 1.0 ~ 8.0 和 1.0 ~ 8.0. 综合考虑所有本构模型,建议 AR 取值在 2.8 ~ 8.0 之间.

3) 对于未知开裂方向的问题,本文建议使用 LE - DP 或 LE - MC 准则,且控制单元的 AR 取值为 1.0.

### 参考文献:

- [ 1 ] Rahman M M, Rahman M K. A review of hydraulic fracture models and development of an improved pseudo-3D model for stimulating tight oil gas sand [ J ]. *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects*, 2010, 32 ( 1 ): 1416 - 1436.
- [ 2 ] Hu Y J, Chen G L, Cheng W P, et al. Simulation of hydraulic fracturing in rock mass using a smeared crack model [ J ]. *Computers and Structures*, 2013, 137 ( 1 ): 72 - 77.
- [ 3 ] Pak A. Numerical modeling of hydraulic fracturing [ D ]. Edmonton: University of Alberta, 1997.
- [ 4 ] Dugdale D S. Yielding of steel sheets containing slits [ J ]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1960, 8 ( 2 ): 100 - 104.
- [ 5 ] Barenblatt G L. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture [ J ]. *Advances in Applied Mechanics*, 1962, 7 ( 1 ): 55 - 129.
- [ 6 ] Mohammadnejad T, Khoei A R. An extended finite element method for hydraulic fracture propagation in deformable porous media with the cohesive crack model [ J ]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2013, 73 ( 1 ): 77 - 95.
- [ 7 ] Lecampion B. An extended finite element method for hydraulic fracture problems [ J ]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2009, 25 ( 1 ): 121 - 133.
- [ 8 ] Adachi J, Siebrits E, Peirce A, et al. Computer simulation of hydraulic fractures [ J ]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2007, 44 ( 5 ): 739 - 754.
- [ 9 ] Bazant Z P, Lin F B. Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture [ J ]. *Journal of Structural Engineering*, 1988, 114 ( 11 ): 2493 - 2510.
- [ 10 ] Bazant Z P, Oh B H. Crack band theory for fracture of concrete [ J ]. *Matériaux et Constructions*, 1983, 16 ( 3 ): 155 - 177.
- [ 11 ] Wang S Y, Sun L, Au A S, et al. 2D-numerical analysis of hydraulic fracturing in heterogeneous geo-materials [ J ]. *Construction and Building Materials*, 2009, 23 ( 1 ): 2196 - 2206.
- [ 12 ] Zhu W, Montesi L G, Wong T F. A probabilistic damage model of stress-induced permeability anisotropy during cataclastic flow [ J ]. *Journal of Geophysical Research*, 2007, 112 ( 1 ): 1 - 20.
- [ 13 ] Brace W F, Paulding B, Scholz C. Dilatancy in the fracture of crystalline rocks [ J ]. *Journal of Geophysical Research*, 1966, 71 ( 16 ): 3939 - 3953.
- [ 14 ] 冷雪峰, 唐春安, 杨天鸿. 岩石水压致裂过程的数值模拟分析 [ J ]. 东北大学学报: 自然科学版, 2002, 23 ( 11 ): 1104 - 1107.
- (Leng Xue-feng, Tang Chun-an, Yang Tian-hong. Numerical simulation and analysis on heterogeneous and permeable rocks under hydraulic fracturing [ J ]. *Journal of Northeastern University: Natural Science*, 2002, 23 ( 11 ): 1104 - 1107. )
- [ 15 ] Lasry D, Belytschko T. Localization limiters in transient problems [ J ]. *International Journal of Solids and Structures*, 1988, 24 ( 6 ): 581 - 597.
- [ 16 ] Fernandes R, Chavant C. Evaluating the reliability of hydro-mechanical : a benchmark of numerical techniques carried out by research group of MoMas [ J ]. *Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables, Clamart Cedex*, 2005, 37 ( 1 ): 211 - 212.
- [ 17 ] Oliver J. A consistent characteristic length for smeared cracking models [ J ]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, 28 ( 2 ): 461 - 474.
- [ 18 ] Mosalam K M, Paulino G H. Evolutionary characteristic length method for smeared cracking finite element models [ J ]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997, 27 ( 1 ): 99 - 108.