

## 考虑随机行驶时间的单线路公交时刻表 设计优化模型

吴影辉<sup>1</sup>, 唐加福<sup>1,2</sup>, 宫俊<sup>1</sup>

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 东北财经大学 管理科学与工程学院, 辽宁 大连 116025)

**摘 要:** 研究了车辆随机行驶时间情况下的单线路公交时刻表设计问题. 考虑了公交运营者主观偏好对最优时刻表设计的影响, 建立了以车辆到站时刻偏差和车辆超时行驶时间的权重之和最小为优化目标的随机期望值模型. 采用 Monte Carlo 仿真和不等式约束的方法将该期望值模型转化为线性规划模型, 然后使用优化求解器 CPLEX 求解模型. 最后通过一个算例, 分别对模型中可用的线路行驶时间参数、晚于时刻表到站时刻偏差的惩罚系数、车辆超时行驶时间的惩罚系数及随机行驶时间的方差进行了灵敏度分析.

**关 键 词:** 公交时刻表; 随机行驶时间; 时间控制站点; 期望值模型; Monte Carlo 方法

**中图分类号:** U 491 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2015)10-1393-06

## Optimization Model for Single Bus Route Schedule Design Problem with Stochastic Travel Time

WU Ying-hui<sup>1</sup>, TANG Jia-fu<sup>1,2</sup>, GONG Jun<sup>1</sup>

(1. School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. College of Management Science and Engineering, Dongbei University of Finance and Economics, Dalian 116025, China. Corresponding author: WU Ying-hui, E-mail: neuyhwu@gmail.com)

**Abstract:** A single bus route schedule design (BRSD) problem with stochastic travel times was studied. The effect of the bus operators' preference on the optimal schedule design was considered, and a stochastic programming model was established for the BRSD problem with the objective of minimizing the weighted sum of the expected value of random schedule deviation and the expected value of overtime for the bus running. The proposed model was transformed into a linear programming model by using Monte Carlo simulation and inequality constraints, and the model was solved by the optimization solvers CPLEX. Finally, a numerical example was given to analyze the sensitivity of the following characteristics. The first is the available bus route travel time, and the second is the weight coefficient for the schedule deviation when bus arrives late. The third is the weight coefficient of the overtime for the bus running and the last is the variances in the bus travel times.

**Key words:** bus route schedule design; stochastic travel time; timing control point; expected value model; Monte Carlo method

公交系统在人们的出行活动中占据着重要的地位. 一个有效的公交系统不仅节省公交运营者的运营成本, 还能吸引更多的乘客选择公交方式出行, 从而减轻城市的交通拥堵. 公交线路时刻表设计是公交系统规划中最基本的活动之一<sup>[1]</sup>.

然而, 由于车辆行驶时间具有不确定性, 造成车辆实际到站时刻与时刻表设定的到站时刻偏差较大, 从而增加了公交时刻表的不可靠性<sup>[2]</sup>. 不可靠的时刻表不但困扰乘客, 还导致乘客对公交服务的整体印象变坏, 这将极大地降低公交出行方

收稿日期: 2014-09-02

基金项目: 国家创新研究群体科学基金资助项目(71021061).

作者简介: 吴影辉(1986-), 男, 安徽阜阳人, 东北大学博士研究生; 唐加福(1965-), 男, 湖南东安人, 东北大学教授, 博士生导师.

式的吸引力<sup>[1]</sup>.

为实现公交车辆到站时刻的准时性,一些公交运营者将公交线路上的某几个站点作为时间控制站点来降低车辆实际到站时刻与时刻表的偏差<sup>[3]</sup>. 这些站点一般是乘客对车辆到站时刻的准时性要求较高的站点,如在学校或公司附近的公交站点. 在采用时间控制站点的策略下,车辆发车时间不得早于时刻表设定的时刻. 为了克服车辆在相邻时间控制站点间路段的行驶时间的不确定性,有些学者提出在公交时刻表中加入松弛时间,从而为车辆提供充足的行驶时间<sup>[4]</sup>.

单线路公交时刻表设计就是在计划时段内设定各车次的车辆到达时间控制站点的时刻. 文献[5-6]采用解析方法或仿真模型来决策加入时刻表的松弛时间,使得系统成本最小. 文献[7]同时考虑了随机的乘客需求和车辆行驶时间,在一个库存优化模型的框架下优化发车频率. 文献[8]将该问题描述为一个 Knapsack 问题,并设计了蚁群和遗传算法进行求解. 文献[9]在文献[3]的基础上进一步分析了四种不同运营策略对公交时刻表设计的影响,并给出了适用范围.

本文从可靠性视角来设计公交时刻表,考虑运营者的主观偏好对时刻表设计的影响,并采用了 Monte Carlo 仿真和不等式约束的方法将提出的期望值模型转化为线性规划模型.

## 1 问题描述与建模

### 1.1 问题描述与假设

设一条公交线路有  $M$  个时间控制站点,为不失一般性,线路第一个站点和最后一个站点分别作为时间控制站点 1 和时间控制站点  $M$ . 路段  $i(i=1,2,\dots,M-1)$  是指从时间控制站点  $i$  到时间控制站点  $i+1$  的路段. 车辆从时间控制站点 1 驶向时间控制站点  $M$ , 车辆在路段  $i$  的行驶时间服从某个概率分布函数(包含乘客在时间控制站点上下车的时间<sup>[4]</sup>). 如果车辆晚于时刻表设定的时刻到达时间控制站点,服务完乘客上下车后立刻出发;若早到达控制站点,车辆则在时刻表设定的发车时刻离开. 针对这一场景,要解决的单线路时刻表设计问题就是:在给定的线路行驶时间约束下,如何分配各路段的车辆行驶时间,使得车辆实际到站时刻与时刻表的偏差和车辆超时行驶时间的权重之和最小.

在计划时段内,假设乘客需求均匀;在相同路段,车辆行驶时间服从相同的概率分布;各车次都

按时从时间控制站点 1 出发. 基于这些假设,模型只需考虑一个车次的场景.

### 1.2 随机数学规划模型

图 1 描述了一个车次车辆的行驶时间过程,图中的符号含义如下.

1) 参数.  $t$  为一个车次可用的线路行驶时间(min);  $M$  为时间控制站点数目;  $\xi_i$  为车辆在路段  $i(i=1,2,\dots,M-1)$  的行驶时间(min),是服从某个概率分布的随机变量;  $\alpha_i$  为运营者对晚于时刻表到达站点  $i(i=2,3,\dots,M)$  的时间偏差的单位惩罚系数;则设早于时刻表到达时间控制站点的时间偏差的单位惩罚系数为 1;  $\beta$  为运营者对车辆超时行驶时间的单位惩罚系数.

2) 决策变量.  $X_i$  为路段  $i$  分配的车辆行驶时间(min).

3) 辅助变量.  $A_i$  为时刻表设定的车辆到达时间控制点  $i(i=1,2,\dots,M)$  的时刻(min),其中已知  $A_1$ ,不妨设  $A_1=0$ ;  $W_i$  为车辆晚于时刻表到达时间控制站点  $i(i=2,3,\dots,M)$  的时间偏差;  $L$  为车辆早于时刻表到达时间控制站点的总时间偏差;  $O$  为车辆超时行驶时间.

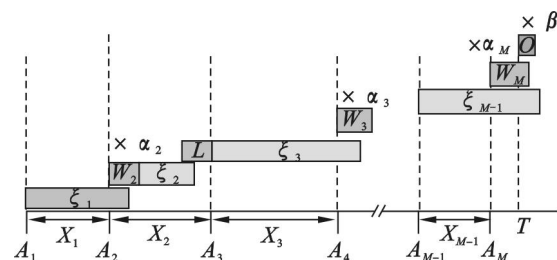


图 1 一个车次车辆的行驶时间过程

Fig. 1 Running process of a single bus trip

期望值模型 P 可描述如下:

$$(P) \min_{\mathbf{X}} E_{\xi} \left[ \sum_{i=2}^M \alpha_i W_i + L + \beta O \right], \quad (1)$$

$$\text{s. t. } W_2 = [\xi_1 - X_1]^+, \quad (2)$$

$$W_{i+1} = [W_i + \xi_i - X_i]^+, i=2,3,\dots,M-1, \quad (3)$$

$$L = \left[ \sum_{i=1}^{M-1} (X_i - \xi_i) + W_M \right]^+, \quad (4)$$

$$O = \left[ \sum_{i=1}^{M-1} \xi_i + L - T \right]^+, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} X_i \leq T. \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_{M-1}]$  和  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{M-1}]$  分别表示决策变量和路段随机行驶时间的向量;  $E(\cdot)$  表示取括号内表达式的期望值. 式(1)为最小化车辆到站时刻偏差和车辆超时行驶时间的权重之和的期望值;约束(2)和(3)为车辆

晚于时刻表到达各时间控制站点的时间偏差值; 约束 (4) 表示车辆早于时刻表到达时间控制站点的总时间偏差值; 约束 (5) 表示车辆超时行驶时间; 约束 (6) 表示路段分配的车辆行驶时间之和不大于一车次可用的线路行驶时间。

通过该优化模型, 求解出各路段的最优车辆行驶时间  $X = [X_1, X_2, \dots, X_{M-1}]$ , 则优化的时刻表中时间控制站点  $i$  ( $i = 2, 3, \dots, M$ ) 的车辆到站时刻可由式 (7) 求得。

$$A_i = A_1 + \sum_{j=1}^{i-1} X_j. \quad (7)$$

在期望模型 P 中, 约束 (2) ~ (5) 是  $W_i, L, O$  取得非负值的表达式, 使得模型 P 不易求解。由于模型 P 是最小化模型, 引入不等式约束 (10) ~ (14) 来替代约束 (2) ~ (5)。因此, 模型 P 可等价

$$\min_{\mathbf{X}} E_{\xi} \{ V(\mathbf{X} | \xi) \}. \quad (8)$$

式中,  $V(\mathbf{X} | \xi)$  是线性规划 P' 的目标函数。

$$(P') \quad V(\mathbf{X} | \xi) = \min \left[ \sum_{i=2}^M \alpha_i W_i + L + \beta O \right], \quad (9)$$

$$\text{s. t.} \quad W_2 \geq \xi_1 - X_1, \quad (10)$$

$$W_{i+1} \geq W_i + \xi_i - X_i, i = 2, 3, \dots, M-1, \quad (11)$$

$$L \geq \sum_{i=1}^{M-1} (X_i - \xi_i) + W_M, \quad (12)$$

$$O \geq \sum_{i=1}^{M-1} \xi_i + L - T, \quad (13)$$

$$W_2, \dots, W_M, L, O \geq 0, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} X_i \leq T. \quad (15)$$

## 2 基于 Monte Carlo 的求解方法

模型 P 中目标函数的期望项使得问题很难求解。Monte Carlo 仿真方法是求解该类问题可供选择的方法之一。通过采样, 随机行驶时间  $\xi_i$  的概率分布可以通过该分布函数随机产生样本大小为  $K$  的离散分布近似代替。Monte Carlo 采样最大的优点是产生近似解的质量取决于抽样样本的规模。模型 P 中目标函数的期望项可以表达为  $K$  次抽样目标之和的均值。因此, 模型 P 可近似转化为如下的线性规划模型 LP。

$$(LP) \quad \min \left\{ \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[ \sum_{i=2}^M \alpha_i W_i^k + L^k + \beta O^k \right] \right\},$$

$$\text{s. t.} \quad W_2^k \geq \xi_1^k - X_1,$$

$$W_{i+1}^k \geq W_i^k + \xi_i^k - X_i \quad i = 2, 3, \dots, M-1,$$

$$L^k \geq \sum_{i=1}^{M-1} (X_i - \xi_i^k) + W_M^k,$$

$$O^k \geq \sum_{i=1}^{M-1} \xi_i^k + L^k - T,$$

$$W_i^k \geq 0, i = 2, 3, \dots, M,$$

$$L^k, O^k \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} X_i \leq T,$$

$$X_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, M-1.$$

式中,  $K$  是抽样样本的个数,  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) 是样本的索引。可以使用优化求解器, 如 CPLEX 直接且有效地求解线性规划模型 LP。

## 3 算例与计算分析

### 3.1 算例与计算结果

采用文献[3]中的公交线路 1 W 作为算例进行计算分析。该条公交线路有 4 个时间控制站点, 分别是站点 1、站点 8、站点 13 和站点 19。线路平均行驶时间为 47.35 min。表 1 给出了车辆在各路段的行驶时间的拟合对数正态分布。 $\mu_i$  和  $\sigma_i$  分别为路段  $i$  上车辆随机行驶时间的对数均值与方差。

表 1 车辆随机行驶时间的拟合对数正态分布  
Table 1 Fitting lognormal distribution of bus travel times

路段 $i$	站点范围	拟合的对数正态分布参数	
		$\mu_i$	$\sigma_i$
1	1 ~ 8	2.917	0.112
2	8 ~ 13	2.525	0.162
3	13 ~ 19	2.776	0.136

其他参数的设置如下:  $T = 50$  min,  $M = 4$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 3$ ,  $\beta = 5$ ,  $K = 5000$ 。在以下计算分析中, 如没有特别说明, 参数值不变。算法采用 Visual C# 编写, 调用 CPLEX 12.4 求解模型 LP。运行算法的计算机配置为 2 GB RAM, 2.27 GHz CPU, Windows 7。所有计算实验的算法运行时间都不超过 3 s。

该算例的计算结果: 站点 1, 8, 13 和 19 的最优到站时间分别为 0, 18.85, 32.41, 50 min; 目标函数值为 14.956。

### 3.2 参数灵敏度分析

本节对模型 P 中参数  $T, \alpha_i = \alpha$  ( $i = 2, 3, 4$ ),  $\beta, \sigma_i = \sigma$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 进行灵敏度分析。在  $T, \alpha, \beta$  和  $\sigma$  的取值范围分别为  $[47, 62]$ ,  $[0.01, 4.0]$ ,

$[0.01, 5.0]$  和  $[0.001, 1.0]$  的情况下进行计算. 线路最优行驶时间等于各路段最优行驶时间之和, 也就是时间控制站点  $M$  的最优到站时间  $A_M$ .

1)  $T$  灵敏度分析. 由图 2 知, 增大  $T$ , 目标函

数值, 晚于时刻表和超时行驶时间惩罚值都减小至不变, 而早于时刻表的偏差惩罚值增大至不变. 各路段分配的行驶时间随  $T$  增大而增大. 线路最优行驶时间最大值为 53 min.

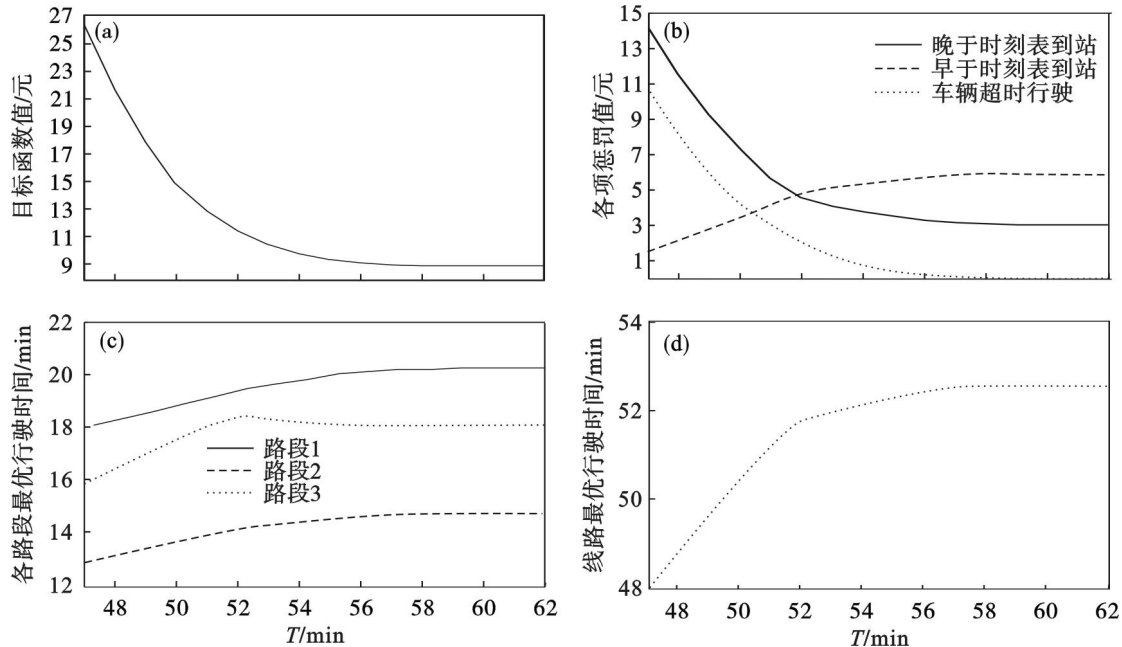


图 2 不同  $T$  下目标函数值、时刻表偏差惩罚值和超时行驶时间惩罚值、各路段最优行驶时间和线路最优行驶时间的变化

Fig. 2 Changes of objective value, schedule deviation value, overtime running value, optimal running time for each segment and route travel time with different  $T$  values

2)  $\alpha$  灵敏度分析. 由图 3 可知, 当  $\alpha$  大于 2 时,  $\alpha$  与目标函数值成线性关系;  $\alpha$  对晚于时刻表

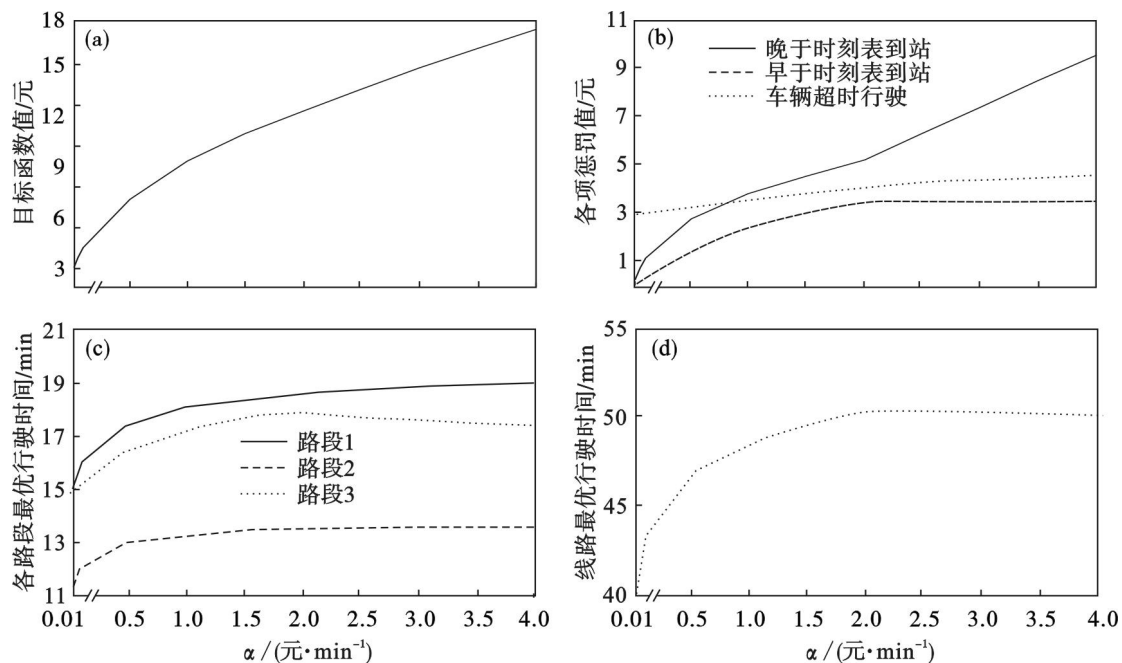


图 3 不同  $\alpha$  下目标函数值、时刻表偏差惩罚值和超时行驶时间惩罚值、各路段最优行驶时间和线路最优行驶时间的变化

Fig. 3 Changes of objective value, schedule deviation value, overtime running value, optimal running time for each segment and route travel time with different  $\alpha$  values



的偏差惩罚值的影响最大;各路段分配的最优行驶时间随  $\alpha$  增大至不变;线路最优行驶时间最大值为 50 min.

3)  $\beta$  灵敏度分析. 由图 4 可知,  $\beta$  与目标函数值成线性关系;  $\beta$  对超时行驶时间惩罚值的影响最大;  $\beta$  对各路段的最优行驶时间影响较小; 线路最优行驶时间不随  $\beta$  而变化.

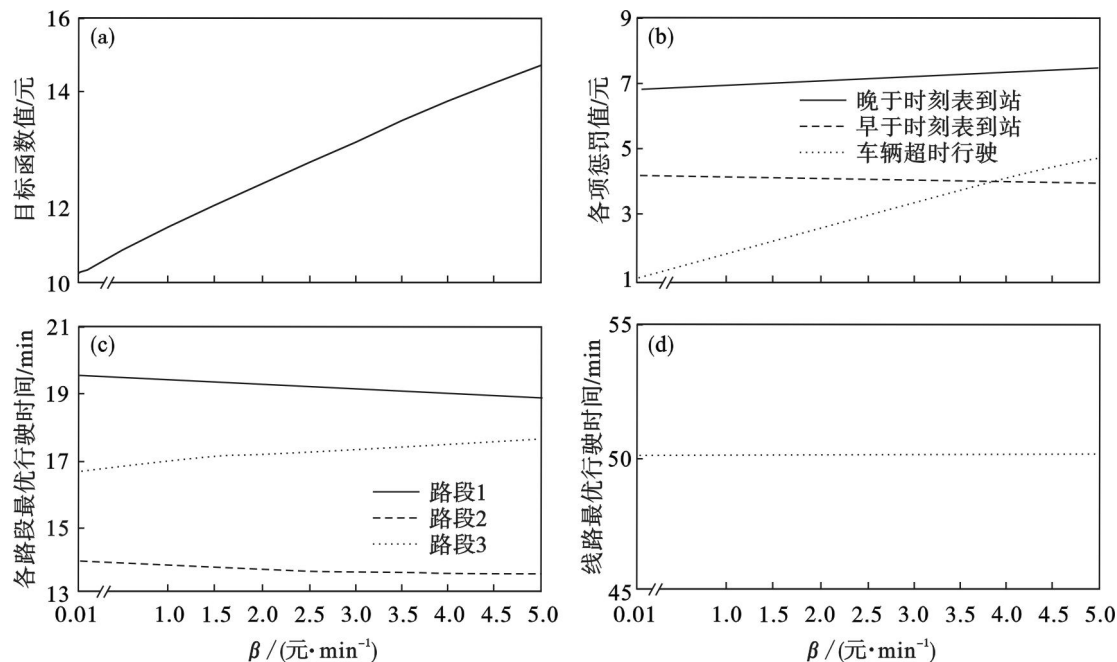


图 4 不同  $\beta$  下目标函数值、时刻表偏差惩罚值和超时行驶时间惩罚值、各路段最优行驶时间和线路最优行驶时间的变化

Fig. 4 Changes of objective value, schedule deviation value, overtime running value, optimal running time for each segment and route travel time with different  $\beta$  values

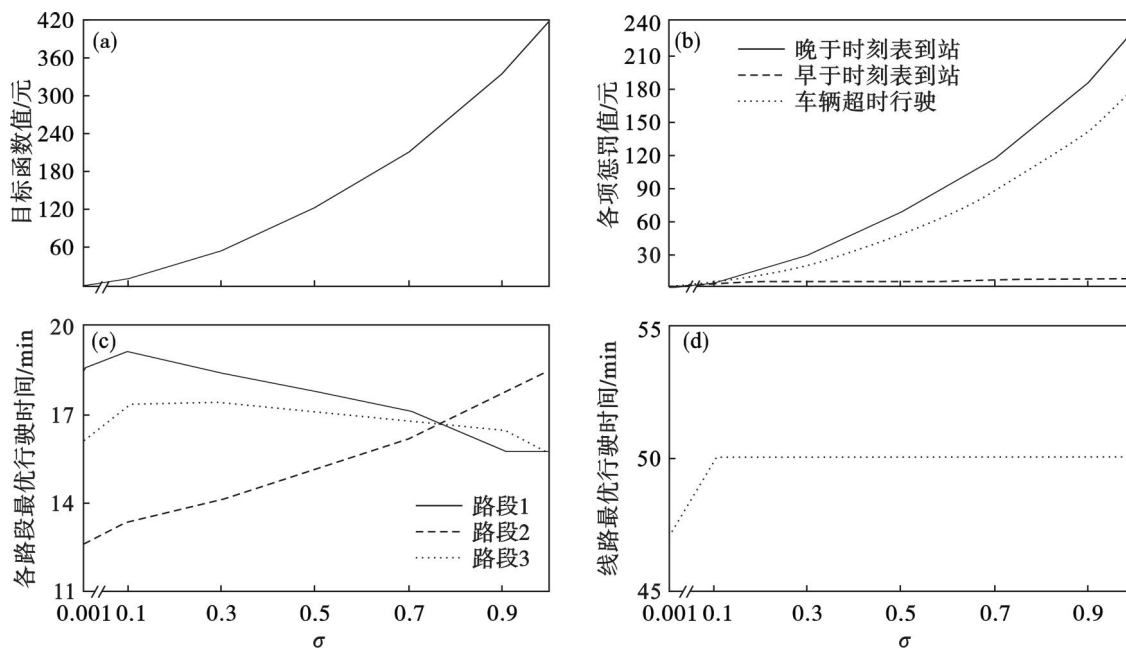


图 5 不同  $\sigma$  下目标函数值、时刻表偏差惩罚值和超时行驶时间惩罚值、各路段最优行驶时间和线路最优行驶时间的变化

Fig. 5 Changes of objective value, schedule deviation value, overtime running value, optimal running time for each segment and route travel time with different  $\sigma$  values

(下转第 1407 页)