

# 正交变传动比面齿轮齿面法向偏差测量及分析

林超<sup>1</sup>, 曹喜军<sup>1</sup>, 王瑶<sup>1</sup>, 徐萍<sup>2</sup>

(1. 重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044; 2. 西南计算机有限责任公司, 重庆 400060)

**摘 要:** 针对三轴数控精铣加工得到的正交变传动比面齿轮零件, 提出了一种基于齿轮测量中心的正交变传动比面齿轮齿面法向偏差测量及分析方法. 通过对理论齿面进行网格划分并在齿轮测量中心上完成对该齿轮零件的齿面测量, 将测量获得的实际坐标数据与计算得出的理论坐标数据进行对比分析, 从而得到了其实际齿面法向偏差, 同时分析了该偏差的基本变化规律, 最终实验结果验证了所建立的正交变传动比面齿轮齿面法向偏差测量及分析方法的可行性.

**关 键 词:** 正交变传动比面齿轮; 齿轮测量中心; 齿面法向偏差; 误差检测

**中图分类号:** TG 86      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2015)11-1658-05

## Normal Error of Tooth Surface Measurement and Analysis of Orthogonal Fluctuating Gear Ratio Face Gear

LIN Chao<sup>1</sup>, CAO Xi-jun<sup>1</sup>, WANG Yao<sup>1</sup>, XU Ping<sup>2</sup>

(1. The State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2. Southwest Computer Co., Ltd., Chongqing 400060, China. Corresponding author: LIN Chao, professor, E-mail: linchao@cqu.edu.cn)

**Abstract:** Aimed at orthogonal variable transmission ratio face gear machined by the 3-axis CNC, a solution of coordinate based on CNC gear measuring center was proposed to detect the normal error of tooth surface. A gridding of tooth surface was made and the theoretical coordinates and normal vectors of the grid nodes were calculated. The comparison with the result of the transmission test and the theoretical data obtained the deviations. At the same time, the fundamental change regularities of bias was analyzed. Finally, the results show that the approach presented is proved to be feasible.

**Key words:** orthogonal fluctuating gear ratio face gear; gear measuring center; normal deviation of tooth surface; error inspection

正交变传动比面齿轮副是一种新型的变传动比齿轮副, 它由一个正交变传动比面齿轮与一个非圆柱齿轮相互啮合, 从而实现相交轴间变传动比运动和动力的传递. 目前, 相关的研究工作才刚刚展开, 要将其从基础理论研究推广到实际应用, 还有许多问题亟待解决<sup>[1]</sup>. 齿面法向偏差是影响齿轮传动平稳性的主要因素, 因此对其研究具有一定的重要性; 其一, 存在齿面法向偏差的齿轮不能保证瞬时传动比, 从而产生振动、噪音以及齿面磨损加剧的现象; 其二, 存在过大齿面法向偏差的齿轮在啮合时将导致与其啮合的轮齿产生塑性变

形, 从而导致其齿面发生永久变形而失效.

关于本正交变传动比面齿轮的误差检测, 国内外还没有相关内容的研究. 本文结合现有的非圆齿轮、锥齿轮、面齿轮与非圆锥齿轮等的误差检测方法对本齿轮进行齿面误差检测. 非圆齿轮形状复杂、种类繁多且测量参数多, 目前国内外都尚未制定出完整的精度标准, 一般是根据使用要求提出一些检查项目<sup>[2]</sup>. 在测量方法上, 国内各生产厂家在生产中只限于用圆柱齿轮与非圆齿轮进行啮合测量. 锥齿轮的检测方法和圆柱齿轮类同<sup>[3-5]</sup>, 通常可分为3种: ①坐标式几何解析测量

法;②啮合式综合精度测量法;③整体误差测量法. 对于面齿轮, 目前还没有统一的精度标准, 一些学者采用齿轮测量中心对面齿轮的齿面偏差进行测量, 以获得齿面整体精度. 非圆锥齿轮作为一种新型的齿轮传动形式<sup>[6]</sup>, 近几年才刚刚进入研究领域, 对它的检测主要是利用三维光学扫描仪进行三维光学检测. 为此, 针对正交变传动比面齿轮, 本文提出了基于齿轮测量中心的齿面法向偏差检测方法, 并开展相关研究工作.

## 1 齿面方程的推导

根据空间齿轮啮合原理<sup>[7-8]</sup>, 分析正交变传动比面齿轮副的基本传动原理, 并建立其啮合坐

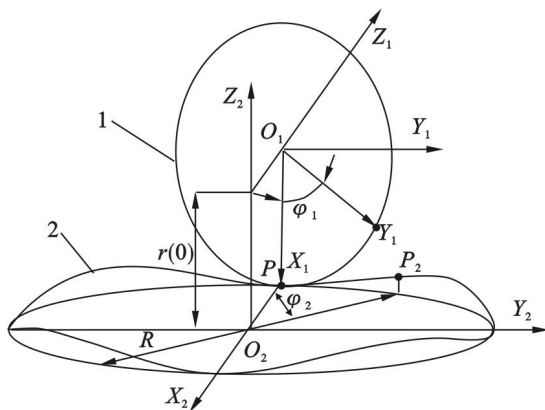


图 1 齿轮副空间啮合原理

Fig. 1 Spatial engagement theory of gear drive

$$\mathbf{r}_3(\varphi_k, \varphi_1) = \begin{bmatrix} L_1 \sin \lambda \sin \varphi_2 - \frac{r_{bk} + L_1 \cos(\varphi_s - \lambda)}{i_{21} \cos \varphi_s} \cos \varphi_2 + r_{bk} \sin \varphi_2 (\sin \varphi_s + \varphi_k \cos \varphi_s) \\ -L_1 \sin \lambda \cos \varphi_2 - \frac{r_{bk} + L_1 \cos(\varphi_s - \lambda)}{i_{21} \cos \varphi_s} \sin \varphi_2 - r_{bk} \cos \varphi_2 (\sin \varphi_s + \varphi_k \cos \varphi_s) \\ r(0) - L_1 \cos \lambda - r_{bk} (\cos \varphi_s + \varphi_k \sin \varphi_s) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{N}^{(s)}$  为坐标系  $S$  中圆柱齿轮刀具齿面的法向量;  $\mathbf{v}_{13}^{(s)}$  为坐标系  $S$  中该面齿轮齿面与圆柱齿轮刀具齿面之间的相对速度;  $L_1 = \sqrt{r^2(\varphi_1) + r_k^2 - 2r_k r(\varphi_1) \sin \mu}$ ;  $\lambda = \arccos \left( \frac{L_1^2 + r^2(\varphi_1) - r_k^2}{2L_1 r(\varphi_1)} \right)$ ;  $r_{bk}$  为刀具基圆半径;  $r_{bk} = r_k \cos \alpha_u$ ;  $\varphi_s = \xi + \varphi_1 - \varphi_k - \varphi_{ok}$ ;  $\alpha_u$  为刀具的压力角;  $\xi$  为刀具绕自身旋转轴的转角,  $\xi = \pi/2 + \eta - \varphi_1 - \mu$ .

## 2 齿面误差检测及分析

### 2.1 测量坐标系的建立

考虑到正交变传动比面齿轮齿面的复杂性,

标系如图 1 所示. 其中:  $S_2$  为正交变传动比面齿轮坐标系;  $S_1$  为非圆柱齿轮坐标系;  $\varphi_1$  为非圆齿轮转角;  $\varphi_2$  为正交变传动比面齿轮转角.

正交变传动比面齿轮副的啮合传动过程, 可以看作是两齿轮的节曲线做纯滚动. 因此, 根据空间齿轮啮合原理, 结合非圆齿轮的椭圆节曲线方程即可推导出与其共轭的正交变传动比面齿轮的节曲线方程, 如式(1)所示:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -\frac{n_2}{2\pi} \cos(\varphi_2) \int_0^{2\pi} r(\varphi) d\varphi, \\ y_2 &= -\frac{n_2}{2\pi} \sin(\varphi_2) \int_0^{2\pi} r(\varphi) d\varphi, \\ z_2 &= r(0) - r(\varphi_1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $n_1$  为非圆齿轮的阶数;  $n_2$  为正交变传动比面齿轮的阶数;  $\varphi$  为椭圆方程的极角.

在该面齿轮的齿廓设计过程中, 假想在齿轮副啮合运动时, 非圆齿轮又同时与一个圆柱齿轮作内啮合运动. 因此, 在该面齿轮与非圆齿轮啮合的瞬间, 就可以看作是圆柱齿轮与该面齿轮的啮合, 从而利用已知的圆柱齿轮的齿廓就可以同时包络出非圆齿轮与该面齿轮的齿廓. 圆柱齿轮刀具的齿面在包络过程中形成的包络曲面簇在  $S_k$  坐标系中可表示为

$$\mathbf{r}_3(u_k, \varphi_k, \varphi_1) = \mathbf{M}_k \mathbf{r}_k(u_k, \varphi_k). \quad (2)$$

加工过程中的啮合方程为

$$S(u_k, \varphi_k, \varphi_1) = \mathbf{N}^{(s)} \cdot \mathbf{v}_{13}^{(s)}. \quad (3)$$

因此, 该面齿轮的齿面用矢量  $\mathbf{r}_3$  表示为

采用三轴数控铣床对其进行加工, 并将加工得到的零件在齿轮测量中心上进行检测(见图 2). 为了避免测量数据在坐标变换时误差的产生, 测量前根据三二一原理建立待测零件的工件坐标系<sup>[9]</sup>.

1) 在待测零件的基准面上采集 3 个以上的点确定其基准平面的法向, 并将此法向作为待建工件坐标系第一轴的方向.

2) 在待测零件的基准线上测量两个以上的点, 并将这些点拟合成的直线或在基准平面上的投影线方向作为待建坐标系第二轴的方向.

3) 在待测零件上采集一个基准点, 并将其在基准面上的投影点作为坐标原点.

最后, 将第一轴的方向矢量和第二轴的方向

矢量叉乘就可以得到第三轴的方向矢量.至此,即可完全确定工件坐标系的全部信息.如图 2 所示.

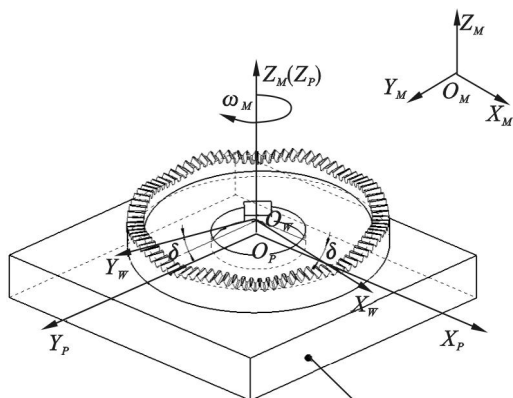


图 2 坐标系关系示意图

Fig. 2 The positional relationship of the coordinate systems

图中: $O_M$ —齿轮测量中心的机器坐标系,与机床固联,所有测量都是在该坐标系内进行;

$O_P$ —测量工作台坐标系,其坐标轴分别与对应的机器坐标系的坐标轴平行;

$O_W$ —工件坐标系,即齿轮设计坐标系.

根据坐标变换原理,可以得出  $O_W$  和  $O_M$  之间的变换关系:

$$\begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

## 2.2 误差测量

正交变传动比面齿轮的轮齿齿面是复杂的空间曲面,为了获得较为精确的轮齿齿面法向偏差,需要对各齿面进行齿面网格划分(见图 3)<sup>[10]</sup>,网格的密度则由测量精度和效率的要求决定.网格的边界则由齿顶变尖界限和齿根根切界限确定.由此,根据齿轮的实际尺寸和精度要求,共选取 35 个点,齿长方向 7 个,齿高方向 5 个,图 3 即为在理论齿面上划分的网格.

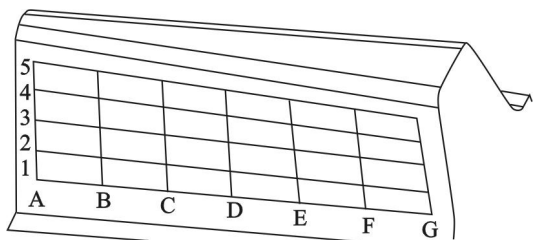


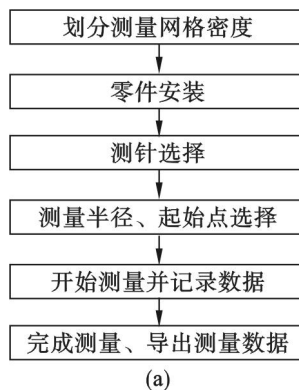
图 3 测量网格划分

Fig. 3 The gridding of tooth surface

本实验所采用的测量仪器是德国克林贝格公司的 P26 齿轮测量中心,通过其轮廓扫描模块完

成对各网格节点的坐标测量.

实验具体流程及实物如图 4 所示.为了避免实验过程中测针与被测齿面或邻侧齿面产生干涉,并且同时保证测量值的准确性,必须合理地选择测针,而测针的选择必须遵循一定的原则:



(a)



(b)

图 4 测量实验

Fig. 4 Measurement experiment

(a)—测量流程图; (b)—实际测量.

1) 被测点所在的切平面与过该点的端平面的交线与测针杆之间的夹角必须大于零且尽量小,以避免测针与被测齿面或邻侧齿面产生干涉;

2) 测针的测头半径应小于轮齿齿面最小曲率半径,以保证测头能够与被测齿面充分接触.

## 2.3 测量数据的处理及分析

由于本齿轮呈周期性变化,并且在一个周期内的轮齿又具有对称性,因此,在数据处理时只选用半个周期的轮齿进行数据分析处理,如图 5 所示.

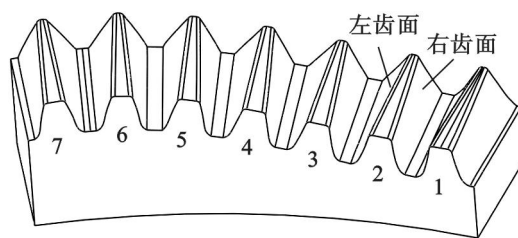


图 5 半个周期轮齿

Fig. 5 Teeth of half cycle

在实际测量过程中,测量工作台的回转中心和齿轮的几何中心很难保证在同一轴线上.因此,为了消除安装的偏心对实际测量结果的影响,需要对测量结果进行安装偏心修正.

由齿轮测量中心工作原理可知,同一次测量时的各测量点在  $xoy$  平面内的投影应处于同一个圆上.所以,根据各实际测量点的  $x, y$  坐标值即可计算出其安装的偏心误差,从而实现对测量值的位置误差补偿.

### 3 齿面法向偏差的评定

#### 3.1 评定模型的建立

根据已知的齿面方程,通过 Matlab 编程求解出理论齿面上各网格节点的坐标值  $(x, y, z)$  以及其单位法向量  $\mathbf{e}_n(x, y, z)$ . 而法向量  $\mathbf{e}_n$  与测量曲线

的交点即为与理论网格节点  $(x, y, z)$  对应的零件齿面实际测量坐标值  $(x', y', z')$ .

$$\mathbf{e}_n(x, y, z) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_k} \times \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_1}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_k} \times \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_1} \right|}. \quad (6)$$

将式(6)带入式(4)中可得

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_k} = \begin{bmatrix} \sin \theta_2 [r'_k \sin(\theta_1 - \xi \pm \theta_k) \pm r_k \theta'_k \cos(\theta_1 - \xi \pm \theta_k)] \\ \cos \theta_2 [r'_k \sin(\theta_1 - \xi \pm \theta_k) \pm r_k \theta'_k \cos(\theta_1 - \xi \pm \theta_k)] \\ -r''_k \cos(\theta_1 - \xi \pm \theta_k) \pm r_k \theta'_k \sin(\theta_1 - \xi \pm \theta_k) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} \theta'_2 \cos \theta_2 [r_k \sin(\theta_1 - \xi \pm \theta_k) + R \sin \varphi] + \sin \theta_2 [r_k (1 - \xi') \cos(\theta_1 - \xi \pm \theta_k) + R' \sin \varphi + R \varphi' \cos \varphi] + \theta'_2 \sin \theta_2 (u_k + R_2) \\ \cos \theta_2 [r_k (1 - \xi') \cos(\theta_1 - \xi \pm \theta_k) + R' \sin \varphi + R \varphi' \cos \varphi] \\ -\theta'_2 \sin \theta_2 [r_k \sin(\theta_1 - \xi \pm \theta_k) + R \sin \varphi] \\ r_k (1 - \xi') \sin(\theta_1 - \xi \pm \theta_k) - R' \cos \varphi + R \varphi' \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (8)$$

因此,点  $(x, y, z)$  处的齿面法向偏差  $\Delta f_n$  为

$$\left. \begin{aligned} dx &= x' - x, \\ dy &= y' - y, \\ dz &= z' - z, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\Delta f_n = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

表 1 为部分理论坐标值和与之对应的测量坐标值,相邻两点之间的坐标值单项差值在  $10^{-2}$  mm 级,因此测量网格密度能满足精度要求.

实验中,经过对齐转换后的测量坐标系与理论坐标系之间仍存在一定偏差,因此,为了保证齿面法向误差的唯一性,在误差处理之前,将齿 1 右齿面中点理论值与实际测量值对齐以确定理论齿面 and 实际齿面的相对位置.

表 1 理论坐标值和与之对应的测量坐标值

Table 1 Theoretical coordinate and the corresponding measuring coordinate

编号	理论坐标值/mm			测量坐标值/mm		
	$x$	$y$	$z$	$x'$	$y'$	$z'$
5A	-13.197	40.525	96.294	-13.193	40.526	96.294
4A	-13.131	40.547	95.995	-13.133	40.546	95.995
3A	-13.045	40.575	95.696	-13.050	40.573	95.696
2A	-12.949	40.605	95.397	-12.961	40.601	95.396
1A	-12.882	40.637	95.097	-12.854	40.646	95.097

#### 3.2 齿面法向偏差分析

根据上述评定模型计算出各齿面的齿面法向偏差,并绘制出半个周期的齿面法向偏差三维形貌图,如图 6 所示,图 7 为齿 6 齿面法向偏差图.

从图中可以看出,本齿轮的齿面法向偏差值均在  $\pm 60 \mu\text{m}$  以内,由此表明其三轴数控精铣加工精度可以达到  $10^{-2}$  mm 级. 并且其偏差值存在一定的规律性,因此为了确定引起该偏差的主要原因,需要对其进行进一步深入分析.

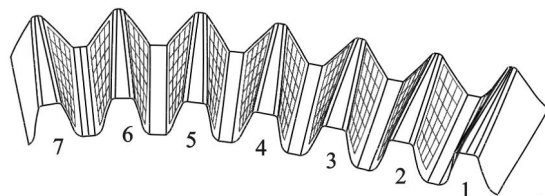


图 6 三维形貌图

Fig. 6 Three-dimensional topography

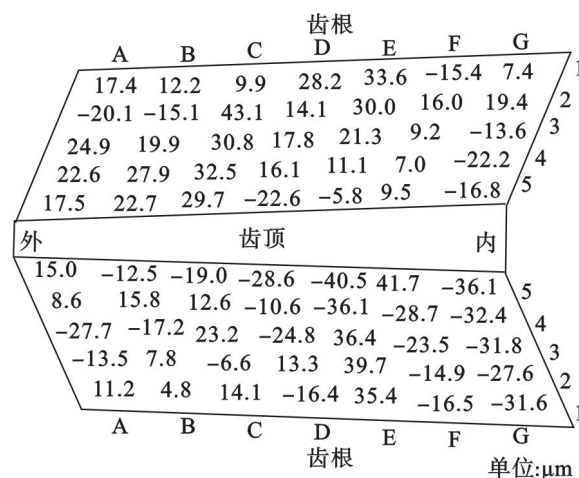


图 7 齿 6 齿面法向偏差图

Fig. 7 The normal error of tooth surface of No. 6

1) 沿齿高方向分别选取各齿齿顶、节曲线、齿根在齿宽中点处各点的法向偏差值,并绘制出



曲线图,如图 8 所示.由图可知,在齿顶处基本为负偏差;节曲线上各点正负偏差值分布均匀;齿根处基本为正偏差.由此可以推测,铣刀在加工时,由于齿根曲面处曲率半径较小,可能出现切削不足的现象,而在齿顶上则出现过切削的现象.

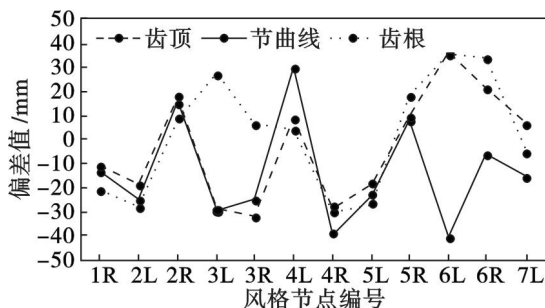


图 8 齿顶、节曲线、齿根处法向偏差图

Fig. 8 The errors at addendum, pitch curve and addendum

2) 沿齿长方向选取轮齿内侧、齿宽中点和轮齿外侧 3 个位置处的各点进行分析,如图 9 所示.各齿齿面内侧对应点的法向偏差规律一致,总体呈现负偏差趋势;轮齿齿宽中点处各节点偏差规律如图 9b 所示,偏差值在横坐标附近波动,且正负偏差分布比较均匀;在轮齿外侧各轮齿左齿面均出现大量正偏差,并且幅值较大,而右齿面多数为负偏差,但幅值较小,因而总体呈现正偏差趋势.由此可以推测,该齿轮在加工时由于轮齿内侧半径较小,出现了过量切削的现象,而外侧半径较大,出现切削不足的现象.

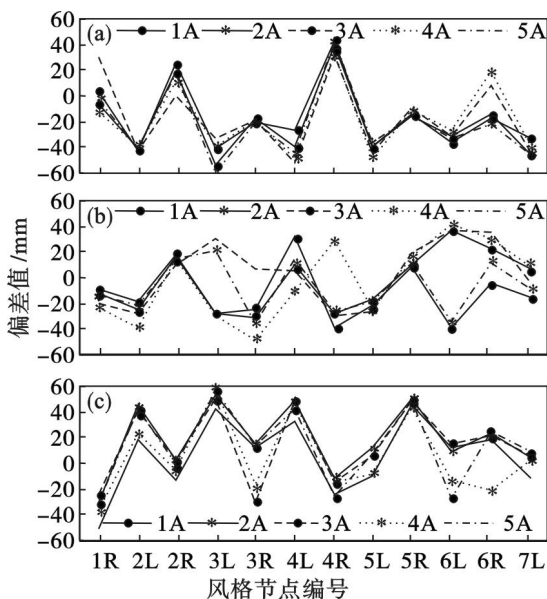


图 9 齿长方向各点齿面法向偏差图

Fig. 9 The errors of each point along the direction of tooth

(a) — 齿宽内侧; (b) — 齿宽中点; (c) — 齿宽外侧.

## 4 结 论

1) 建立了正交变传动比面齿轮齿面法向偏差测量模型,在齿轮测量中心上测量得到了其齿面坐标点集,并进行了有效的数据提取和处理.

2) 建立了正交变传动比面齿轮齿面法向偏差的评定模型,完成了对其齿面法向偏差的计算,验证了正交变传动比面齿轮的设计和加工的可行性.

3) 通过对法向偏差值进行分析对比,获得了其分布规律:在齿顶以及轮齿外侧基本为正偏差,而齿根和轮齿内侧主要为负偏差.

## 参考文献:

- [1] Lin C, Gong H, Nie N, et al. Geometry design three-dimensional modeling and kinematic analysis of orthogonal fluctuating gear ratio face gear drive [J]. *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2013, 227 (4): 779 – 793.
- [2] 唐德威, 邓宗全, 于红英, 等. 非圆齿轮的测绘设计方法研究 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2005, 37 (5): 581 – 583. (Tang De-wei, Deng Zong-quan, Yu Hong-ying, et al. Study on mapping design method of non-circular gear [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2005, 37 (5): 581 – 583.)
- [3] Guenther A. Interpretation of bevel gear topography measurements [J]. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 2011, 60 (1): 551 – 554.
- [4] Suh S H, Lee E S, Kim H C, et al. Geometric error measurement of spiral bevel gears using a virtual gear model for STEP-NC [J]. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2002, 42 (3): 335 – 342.
- [5] José S, Gerardo R, Sergio P, et al. Geometrical principles for analysing hypoid gears in coordinate measuring machines: involutometry, protocols, data interpretation [J]. *Measurement*, 2012, 45 (10): 2368 – 2375.
- [6] 林超, 曾庆龙, 聂玲, 等. 高阶椭圆锥齿轮齿距误差的三坐标测量方法 [J]. 重庆大学学报: 自然科学版, 2013, 36 (10): 1 – 7. (Lin Chao, Zen Qin-long, Nie Ling, et al. Pitch error measurement of high-order oval bevel gear on three dimensional measuring machining [J]. *Journal of Chongqing University: Natural Science*, 2013, 36 (10): 1 – 7.)
- [7] Litvin F L, Faydor L. Gear geometry and applied theory [M]. New York: Cambridge University Press, 2004.
- [8] Faydor L L, Alfonso F, Claudio Z, et al. Face-gear drive with spur involute pinion: geometry, generation by a worm, stress analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191 (25): 2785 – 2813.
- [9] 王亚平, 郑彦龙. 三维测量软件系统中坐标系的建立方法 [J]. 工业计量, 2004, 14 (6): 27 – 30. (Wang Ya-ping, Zheng Yan-long. Creation method of coordinate system in 3-D measuring software system [J]. *Industrial Measurement*, 2004, 14 (6): 27 – 30.)
- [10] Anke G, Karin K, Frank H, et al. Introduction of a new bevel gear measurement standard [J]. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 2013, 62 (1): 515 – 518.