

## 基于压缩感知的 MIT 图像重建方法

王静文, 王 旭

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 针对目前磁感应成像技术(MIT)的图像重建质量存在精度较低的问题,提出了一种基于压缩感知原 MIT 图像重建方法. 将 MIT 系统电压数据的采集过程视为压缩感知的线性测量过程,通过对灵敏度矩阵进行补零拓展和行向量随机重组操作重新设计了测量矩阵;采集到的电压向量也用相同的方式处理,作为压缩感知的测量信号. 然后利用压缩感知信号重构算法恢复原始信号. 最后进行了仿真实验,实验结果表明,利用本方法获得的重建图像误差和相关系数比传统图像重建算法要好. 由此可见,这是一种精度较高的 MIT 图像重建方法.

**关 键 词:** 磁感应成像;压缩感知;图像重建;图像误差;相关系数

中图分类号: TP 391.4

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2015)12-1687-04

## Image Reconstruction Method Based on Compressed Sensing for Magnetic Induction Tomography

WANG Jing-wen, WANG Xu

(School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: WANG Jing-wen, E-mail: wangjingwenhappy@126.com)

**Abstract:** To improve image reconstruction quality of magnetic induction tomography (MIT), a new MIT image reconstruction method based on compressed sensing was put forward. Here the voltage collection process of MIT system was regarded as linear measurement process of compressed sensing, the measurement matrix was designed by zero expansion of the sensitivity matrix and its row vectors random reconstruction, and the measurement voltage vector expanded by the same way was regarded as measurement signals of compressed sensing. The original signal was recovered by signal reconstruction method of compressed sensing. Finally, the simulation experiments were performed. The experimental results indicated that the average image reconstruction error and the average correlation coefficient obtained by the method are better than corresponding indicators obtained by the traditional reconstruction image algorithm. So it is a kind of MIT image reconstruction method with high accuracy.

**Key words:** magnetic induction tomography(MIT); compressed sensing; image reconstruction; image error; correlation coefficient

磁感应成像技术(magnetic induction tomography, MIT)是一种新兴的电学层析成像技术,它通过电磁传感器阵列来检测被测物体,计算出被测物体的电导率或磁导率的空间分布<sup>[1]</sup>. 磁感应成像技术具有非接触性、非侵入性、可检测磁性材料等优点,因此在工业过程控制、生物医学研究、异物监测等领域应用前景广泛<sup>[2]</sup>. MIT 图像

重建算法的好坏直接影响到模型的电导率或磁导率分布. LBP 和 Landweber 是现有的 MIT 图像重建算法. LBP<sup>[3]</sup> 算法优点是成像速度快,无需迭代,但该算法理论基础不够完善,导致重构出的图像失真较大. Landweber 迭代算法的图像重建质量比 LBP 算法更好,且适应于大部分流型,但由于该算法是沿最速下降方向搜索,该搜索方向并

收稿日期: 2014-11-23

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N130404004).

作者简介: 王静文(1988-),女,辽宁锦州人,东北大学博士研究生;王 旭(1956-),男,辽宁沈阳人,东北大学教授,博士生导师.

不理想,只有最初几步收敛较快,迭代过程中易陷入局部极值,且其结果容易受参数影响出现发散<sup>[4]</sup>;总变差(total variation, TV)正则化算法能保证求解的稳定性,且具有良好的保边缘性,但实时性很差,不符合 MIT 实时在线检测的条件<sup>[5]</sup>.

Donoho 等建立了压缩感知(compressive sensing, CS)理论框架<sup>[6]</sup>. 其优势是一边得到信号,一边对其进行压缩,采样频率选取比传统方法更少的采样数,这样节省存储空间的同时又包含了足够的信息量. 目前,学者们已经在水下监测、合成孔径雷达成像、无线传感器网络等诸多领域对压缩感知展开了广泛的应用研究<sup>[7]</sup>.

本文将 MIT 系统的数据采集过程看作是压缩感知针对原始信号的线性测量过程,并设计了测量矩阵. 利用压缩感知原理重构出原始信号,达到图像重建的目的.

## 1 MIT 图像重建基本原理

MIT 系统通过传感器获取模型的电导率或磁导率分布的“投影”信息(即电压),再将这些电压值输入成像系统,采用某种图像重建算法重建出与介质模型(导磁性或导电性)的分布图像.

图 1 为 MIT 系统原理示意图,其硬件部分由三部分构成:线圈、电子控制单元和计算机.

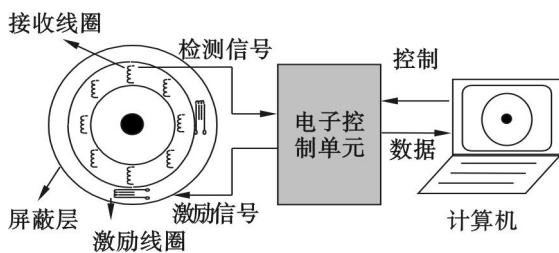


图 1 MIT 系统结构图  
Fig. 1 Structure diagram of MIT system

在 MIT 系统中,传感器阵列不同线圈组合的检测电压  $V_{ed}$  与测量的电导率  $\sigma(x, y)$  间的关系可以表示为

$$V_{ed}(x, y) = \iint_{\varphi} \sigma(x, y) S_{ed}[(x, y), \mu(x, y), \sigma(x, y)] dx dy. \quad (1)$$

其中:  $\varphi$  为被测区域;  $S_{ed}[(x, y), \mu(x, y), \sigma(x, y)]$  为敏感场的分布函数;  $V_{ed}$  为检测电压.

式(1)离散化和线性化,可得 MIT 数学模型:

$$\mathbf{V} = \mathbf{S}\sigma. \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{V}$  代表测量电压值;  $\mathbf{S}$  代表灵敏度矩阵;  $\sigma$  代表电导率. 图像重建的目的是通过测得的电压

值解电导率的分布.

## 2 基于压缩感知的 MIT 图像重建

### 2.1 压缩感知的基本原理

压缩感知理论的前提条件是信号具有稀疏性或可压缩性,但一般的信号都不是稀疏的,为了使信号满足压缩感知理论,将其正交变换,使信号具有稀疏性或可压缩性.

对于长度为  $N$  的离散信号  $\mathbf{x}$ ,由信号理论可知  $\mathbf{x}$  能够用一组基  $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  的线性组合来表示:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N \psi_n \alpha_n = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha}. \quad (3)$$

其中:  $\boldsymbol{\psi}$  表示  $N \times N$  的正交矩阵;  $\boldsymbol{\alpha}$  表示  $N \times 1$  的系数向量. 当  $\boldsymbol{\alpha}$  仅有  $K < N$  个非零系数时,信号  $\mathbf{x}$  在基  $\boldsymbol{\psi}$  上是稀疏的,稀疏度为  $K$ ; 称基  $\boldsymbol{\psi}$  为信号  $\mathbf{x}$  的稀疏基. 适当选取稀疏基  $\boldsymbol{\psi}$ , 使信号的稀疏系数个数尽量少,这样既能提升采集速度,又能减少存储空间.

压缩感知的核心是线性测量过程,通过非相关测量将信号  $\mathbf{x}$  投影到维数少的测量向量  $\mathbf{y}$  上:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha}. \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{y}$  为  $M \times 1$  ( $M < N$ ) 的向量;  $\boldsymbol{\Phi}$  为  $M \times N$  的测量矩阵<sup>[8]</sup>.

由于测量值维数  $M$  小于信号维数  $N$ , 所以式(4)是一个欠定方程. 但由于  $\boldsymbol{\alpha}$  仅有  $K$  个非零系数,且  $K < M < N$ , 那么通过求解式(4)的逆问题得到稀疏系数  $\boldsymbol{\alpha}$ , 从而通过式(3)恢复重构信号  $\mathbf{x}$ .

在  $l_0$  范数下求解最优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\boldsymbol{\alpha}\|_{l_0} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha}. \end{aligned} \quad (5)$$

测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  在满足 RIP 准则下,  $M$  个测量值才能还原出  $K$  个系数, 所谓的 RIP 准则就是测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  和稀疏基  $\boldsymbol{\psi}$  不相关<sup>[9]</sup>.

### 2.2 MIT 系统的测量矩阵设计

MIT 系统数据采集过程可视为是对被测模型的电导率分布信号的线性测量过程,其测量矩阵即为灵敏度矩阵  $\mathbf{S}$ , 数学模型如式(2)所示. 这与压缩感知的采样过程(如式(4)所示)十分类似. 然而,压缩感知要求测量矩阵能够使任意  $K$  个稀疏信号  $\mathbf{x}$  从  $\mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^M$  的投影过程中主要信息不丢失,才能准确重构原始信号. 因此必须使设计的测量矩阵和稀疏矩阵之间满足不相干性和受限等距特性这两个必要的条件.

通过增加测量电压数目可以提高采样率,一

般从增加电磁线圈数来增加测量电压数目,但势必会造成传感器间的距离过小,从而增加了干扰信号. 所以可采用补 0 的方法来增加测量电压数目,即假设增加一些虚构的电磁线圈,所有网格节点相对于这些虚构电磁线圈的灵敏度为 0,那么这些虚构电磁线圈的测量电压为 0. 假设增加虚构电压后,MIT 系统的数学模型变为

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\sigma}. \quad (6)$$

其中  $\mathbf{V}_0$  和  $\mathbf{S}_0$  分别是增加虚构电磁线圈后电压向量和灵敏度矩阵.

将增加虚构电磁线圈后的灵敏度矩阵  $\mathbf{S}_0$  按行随机排列形成新的灵敏度矩阵记为  $\mathbf{S}_{\text{new}}$ , 电压值  $\mathbf{V}_0$  变为  $\mathbf{V}_{\text{new}}$ , 则 MIT 系统的数学模型可用式 (7) 来表示:

$$\mathbf{V}_{\text{new}} = \mathbf{S}_{\text{new}} \boldsymbol{\sigma}. \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{S}_{\text{new}}$  即为 MIT 系统的测量矩阵.

### 2.3 基于压缩感知的 MIT 图像重构过程

在 MIT 系统中,对于大多数的流型,信号稀疏度几乎都无法满足压缩感知的要求. 为了使 MIT 系统原始信号能够适应压缩感知理论,须对信号进行正交变换来满足压缩感知要求的稀疏信号. 其过程如式 (8) 所示:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{s}. \quad (8)$$

其中:  $\boldsymbol{\sigma}$  表示仿真模型的电导率,大小为  $N$  维;  $\boldsymbol{\psi}$  表示信号  $\boldsymbol{\sigma}$  的稀疏基,大小为  $N \times N$ ;  $\mathbf{s}$  表示原始信号  $\boldsymbol{\sigma}$  在其稀疏基  $\boldsymbol{\psi}$  上的投影,为  $N$  维稀疏信号.

MIT 系统的数学模型变为

$$\mathbf{V}_{\text{new}} = \mathbf{S}_{\text{new}} \boldsymbol{\psi} \mathbf{s}. \quad (9)$$

由于信号  $\mathbf{s}$  是稀疏的,因此方程可解,可以通过求解式 (10) 来获得稀疏信号  $\mathbf{s}$ .

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{s}\|_{l_0} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{V}_{\text{new}} = \mathbf{S}_{\text{new}} \boldsymbol{\psi} \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (10)$$

通过压缩感知信号重构算法求得稀疏信号  $\mathbf{s}$  以后,电导率  $\boldsymbol{\sigma}$  可以通过求解式 (8) 来获得.

具体实现步骤:

**Step 1 初始化:** 对由 MIT 系统获得的电压和灵敏度数据进行归一化,归一化后的电压向量记为  $\mathbf{V}$ , 归一化后的敏感场矩阵记为  $\mathbf{S}$ .

**Step 2 设计测量矩阵:** 对灵敏度矩阵  $\mathbf{S}$  进行补零拓展和行向量随机重组操作,生成的矩阵  $\mathbf{S}_{\text{new}}$  即为压缩感知对应的测量矩阵;为使新生成的测量矩阵  $\mathbf{S}_{\text{new}}$  满足 MIT 系统方程,需要对电压向量  $\mathbf{V}$  也进行同样的操作,所生成新的电压向量记为  $\mathbf{V}_{\text{new}}$ .

**Step 3 构造稀疏基:** 本文采用余弦 DCT 基.

设原始信号的长度为  $N$ , 离散余弦 DCT 基可通过式 (11) ~ (12) 得到:

$$\boldsymbol{\psi}(m, n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[ c(m) \cos \frac{(2n-1)(m-1)}{2N} \right] \quad (11)$$

其中:  $m, n = 1, 2, \dots, N$ ;

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & m = 1, \\ 1 & m = 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

**Step 4 MIT 图像重建:** 通过求解式 (10) 的最优化问题,从而获得仿真模型的电导率分布的重构.

## 3 仿真实验与结果

本文选择了 4 种具有代表性的电导率分布模型进行仿真实验. MIT 系统选取了具有 8 个电磁线圈传感器系统,被测模型为圆形. 图 2 是原始图像,图 3 ~ 图 5 是传统算法 (LBP 算法)、TV 算法和本文算法的图像重建结果.

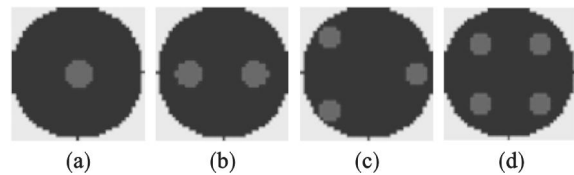


图 2 原始图像

Fig. 2 Original images

(a) — 单个扰动; (b) — 2 个扰动;  
(c) — 3 个扰动; (d) — 4 个扰动.

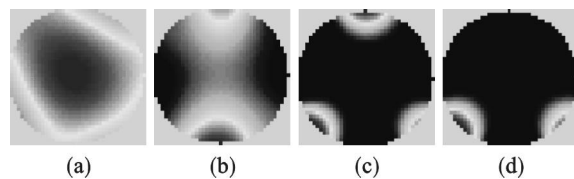


图 3 LBP 算法图像重建结果

Fig. 3 Images reconstructed by LBP algorithm

(a) — 单个扰动; (b) — 2 个扰动;  
(c) — 3 个扰动; (d) — 4 个扰动.

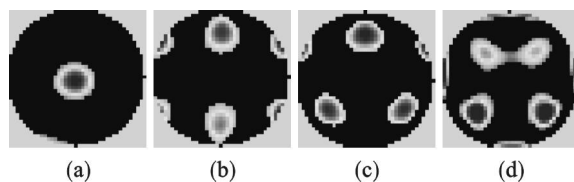


图 4 TV 迭代算法图像重建结果

Fig. 4 Images reconstructed by TV algorithm

(a) — 单个扰动; (b) — 2 个扰动;  
(c) — 3 个扰动; (d) — 4 个扰动.

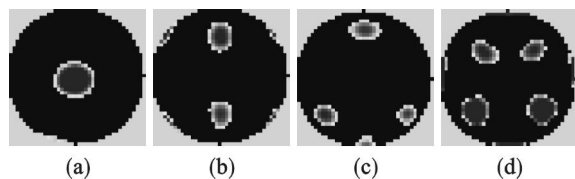


图 5 本文方法图像重建结果

Fig. 5 Images reconstructed by the method in this paper

(a)—单个扰动; (b)—2 个扰动;  
(c)—3 个扰动; (d)—4 个扰动.

从图 3, 图 4 和图 5 中可以看出本文的图像重建算法在重建质量上要优于其他 2 种算法.

为了便于评价和对比 3 种 MIT 图像重建算法的性能, 引入两个指标: 图像误差和相关系数<sup>[10]</sup>. 图像误差是指重建图像与原始图像间的相对误差, 计算公式如式 (12) 所示. 相关系数是指重建图像灰度向量与原始图像灰度向量各变量之间的线性相关程度, 计算公式如式 (13) 所示.

$$\text{error} = \frac{\|\sigma - \bar{\sigma}\|^2}{\|\sigma\|^2}. \quad (12)$$

$$\rho_{gg} = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{\sigma} - \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\bar{\sigma} - \bar{\sigma})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma - \bar{\sigma})^2}}. \quad (13)$$

式中:  $\sigma$  为原始图像的电导率分布, 均值为  $\bar{\sigma}$ ;  $\bar{\sigma}$  为重建图像的电导率分布, 均值为  $\bar{\sigma}$ . 表 1 和表 2 分别为传统图像重建算法 (LBP 算法)、TV 算法和本文方法与原始图像间的图像误差和相关系数.

表 1 不同算法重建图像的误差

Table 1 Image errors of different reconstruction image algorithms %

扰动	LBP	TV	本文算法
a	195.09	48.07	41.23
b	149.83	63.89	46.98
c	77.17	51.69	40.69
d	147.65	62.90	48.95
平均值	142.44	56.64	44.46

表 2 不同算法重建图像的相关系数

Table 2 Correlation coefficients of different reconstruction image algorithms

扰动	LBP	TV	本文算法
a	0.279 6	0.880 1	0.927 0
b	0.403 7	0.798 1	0.871 9
c	0.516 0	0.729 8	0.838 0
d	0.372 4	0.706 4	0.831 6
平均值	0.392 9	0.778 6	0.867 1

从表 1 和 2 可得, 利用本文算法与传统图像重建算法 (LBP 算法)、TV 算法相比, 其图像误差更小, 线性相关程度更高.

## 4 结 语

从仿真实验结果中看出, 本文方法的图像误差和相关系数比传统图像重建算法 (LBP 算法) 和 TV 算法要好得多. 由此可见, 本文方法用于 MIT 图像重建是有效且精度较高的, 值得进一步研究和推广.

## 参考文献:

- [1] Griffiths H. Magnetic induction tomography [J]. *Measurement Science and Technology*, 2001, 12(8): 1126 - 1131.
- [2] Tallon S J, Davies C E. The effect of pipeline location on acoustic measurement of gas-solid pipeline flow [J]. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2000, 11(3): 165 - 169.
- [3] Soleimani M. Image and shape reconstruction methods in magnetic induction and electrical impedance tomography [D]. Manchester: University of Manchester, 2005.
- [4] Zhang M, Ma L, Soleimani M. Magnetic induction tomography guided electrical capacitance tomography imaging with grounded conductors [J]. *Measurement*, 2014, 53(7): 171 - 181.
- [5] Wang H X, Tang L, Cao Z. An image reconstruction algorithm based on total variation with adaptive mesh refinement for ECT flow [J]. *Measurement and Instrumentation*, 2007, 18: 262 - 267.
- [6] Kamilov U S, Goyal V K, Rangan S. Message-passing de-quantization with applications to compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60 (12): 6270 - 6281.
- [7] Ji J, Li X, Wang Q. A synthetic aperture radar image compression algorithm based on compressed sensing [J]. *Advanced Science Letters*, 2012, 7 (7): 320 - 322.
- [8] 吴新杰, 黄国兴, 王静文. 压缩感知理论在 ECT 流型辨识中的应用 [J]. *光学精密工程*, 2013, 12(4): 443 - 469 (Wu Xin-jie, Huang Guo-xing, Wang Jing-wen. Application of compressed sensing in flow pattern identification of ECT [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2013, 12(4): 463 - 469.)
- [9] Candes E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing matrices [J]. *Comptes Rendus Mathematique*, 2008, 346 (9): 589 - 592.
- [10] 彭黎辉, 陆耿, 杨五强. 电容成像图像重建算法原理及评价 [J]. *清华大学学报: 自然科学版*, 2004, 44(4): 478 - 483. (Peng Li-hui, Lu Geng, Yang Wu-qiang. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography: state of the art [J]. *Journal of Tsinghua University: Science and Technology*, 2004, 44(4): 478 - 483.)