

# 基于析取图考虑物料搬运的 Job Shop 调度算法

周炳海, 周淑美, 赵 猛

(同济大学 机械与能源工程学院, 上海 201804)

**摘 要:** 为有效解决考虑物料搬运设备的 Job Shop 调度问题, 建立了非线性规划模型及改进析取图模型. 在此基础上, 以最小化最大完工时间 makespan 为调度目标, 构造了两阶段结构式启发式调度算法. 第一阶段, 将析取图分解为机床调度析取子图和搬运设备调度析取子图, 提出一个双层递进启发式算法. 上层利用分支思想求解机床调度析取子图, 根据上层结果, 求解搬运设备调度析取子图. 在第一阶段解的基础上, 第二阶段构造了基于块理论的调度优化启发式算法. 最后对算法进行了仿真分析, 结果表明所提出的算法是有效、可行的.

**关 键 词:** 析取图; 物料搬运; 调度; Job Shop; 启发式算法

**中图分类号:** TP 29      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2016)01-0138-05

## Disjunctive Graph-Based Scheduling Algorithm for Job Shop with Material Handling

ZHOU Bing-hai, ZHOU Shu-mei, ZHAO Meng

(School of Mechanical Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China. Corresponding author: ZHOU Bing-hai, E-mail: bhzhou@tongji.edu.cn)

**Abstract:** Take the scheduling problems of the Job Shop with material handling equipment into consideration, we established the non-linear programming model and modified disjunctive graph model. Afterwards, a two-stage structural heuristic algorithm was constructed to minimize the makespan. In the first stage, a hierarchical heuristic algorithm was constructed by dividing the disjunctive graph into sub-graphs of scheduling problems for the machines and handling equipment, respectively. The sub-graphs of scheduling problems for the machines in the upper level were solved based on a branch method, while for the handling equipment in the second level were according to the upper level results. In the second stage, a heuristic algorithm based on the block theory was presented to optimize the scheduling solutions. Finally, simulation experiments were designed and indicated that the proposed algorithm is valid and feasible.

**Key words:** disjunctive graph; material handling; scheduling; Job Shop; heuristic algorithm

对于 Job Shop 调度问题, 大多数研究都不考虑搬运设备, 而仅仅对机床进行调度. 考虑物料搬运的 Job Shop 调度问题更贴近实际生产.

近年来, 一些学者在研究传统 Job Shop 调度的基础上, 对考虑物料搬运的 Job Shop 调度问题进行了研究. 文献[1]提出了考虑物料搬运的 Job Shop 调度问题, 但未研究求解算法. 文献[2-3]针对考虑一个搬运设备的 Job Shop 调度问题, 分别提出了基于禁忌搜索算法的两阶段算法和并行

禁忌搜索算法. 文献[4]针对含有一个机器人的制造单元调度问题, 提出了改进遗传算法. 近来, 有学者对考虑多个物料搬运设备的 Job Shop 调度问题进行了研究. 文献[5]针对带多个搬运设备的 Job Shop 调度问题, 提出了一个局域搜索算法. 文献[6]针对带多个搬运设备的 Job Shop 调度问题, 设计了一种文化基因算法. 文献[7]对带多个搬运设备的柔性 Job Shop 调度问题进行了研究, 同时构造了局域搜索算法. 文献[8]对考虑

多个搬运设备的加工时间不确定的柔性 Job Shop 调度问题进行了研究,同时提出了遗传算法和禁忌搜索算法的混合算法. 上述对考虑物料搬运的 Job Shop 调度问题的研究均使用元启发式算法 (meta heuristic algorithms), 求解比较耗时. 结构化启发式算法 (structured heuristic algorithms) 求解速度快,然而关于此类算法的研究却较为少见.

本文在上述文献研究的基础上,以最小化最大完工时间 makespan 为调度目标,利用改进析取图建立调度模型,在引入析取子图的基础上,构建了两阶段构造式启发式算法.

## 1 问题描述与建模

带物料搬运设备的 Job Shop 调度问题可以描述为:  $n$  个工件  $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$  在  $m$  台机床  $\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$  上加工,工件  $J_i$  包括  $n_i$  个工序  $O_{i,j}$  ( $j=1, 2, \dots, n_i$ ), 每个工序  $O_{i,j}$  对应一台机床  $M(O_{i,j})$ , 其加工时间  $p_{i,j}$  为定值. 当工序  $O_{i,j}$  在机床  $M(O_{i,j})$  上完成加工之后,触发搬运工序  $T_{i,j}$ . 搬运过程如下: 工件  $J_i$  在机床  $M(O_{i,j})$  上等待搬运,发出搬运请求之后,搬运设备  $R$  先从当前位置空载行驶到机床  $M(O_{i,j})$ , 加载工件,然后负载将工件  $J_i$  搬运至下一道工序  $O_{i,j+1}$  对应的机床  $M(O_{i,j+1})$  处. 考虑搬运工序之后,工件的实际工序顺序可以表示为  $O_{i,j} < T_{i,j} < O_{i,j+1} < T_{i,j+1} < \dots < O_{i,n_i}$  ( $O_{i,j} < T_{i,j}$  表示  $O_{i,j}$  在  $T_{i,j}$  之前完成). 调度目标是使总完工时间  $t_{f,\max}$  最小.

针对以上问题,作如下假设: 1) 每台机床的缓冲区均足够大; 2) 搬运设备一次只能搬运一个工件; 3) 搬运设备在两台机床之间的搬运时间只取决于机床的位置,与工件无关; 4)  $t_{k,h}^L$  表示负载搬运设备从  $M_k$  到  $M_h$  的时间,运输时间满足约束关系  $t_{k,h}^L + t_{h,l}^L \geq t_{k,l}^L$ ; 5)  $t_{k,h}^E$  表示空载搬运设备从  $M_k$  到  $M_h$  的时间,空载时间满足约束关系  $t_{k,h}^E + t_{h,l}^E \geq t_{k,l}^E$ ,  $t_{k,l}^E, t_{k,k}^E = 0$ ; 6) 不考虑工件的加载和卸载时间.

为了清晰地表述调度问题,定义以下符号和变量:  $t_{f,i}$  表示工件  $J_i$  的完成时间;  $t_{s,o_{i,j}}$  表示工序  $O_{i,j}$  开始时间;  $t_{s,i,j}$  表示工序  $T_{i,j}$  开始时间;  $Q$  为一个任意大的正数;  $X_{j,j'}^i = 1$  表示  $O_{i,j}$  在  $O_{i,j'}$  之前完成,否则,  $X_{j,j'}^i = 0$ ;  $DP_{i,j}^k = 1$  表示工序  $O_{i,j}$  由机床  $M_k$  完成,否则,  $DP_{i,j}^k = 0$ ;  $YDP_{i,j,i',j'}^k = 1$  表示  $DP_{i,j}^k = 1, DP_{i',j'}^k = 1$  且  $O_{i,j}$  先于  $O_{i',j'}$  在  $M_k$  上加工,否则,  $YDP_{i,j,i',j'}^k = 0$ ;  $DT_{i,j}^R = 1$  表示加工任务  $O_{i,j}$  由搬运设备  $R$  运送至下一个对应的加工机床,否

则,  $DT_{i,j}^R = 0$ ;  $YDT_{i,j,i',j'}^R = 1$  表示  $T_{i,j}$  先于  $T_{i',j'}$  被  $R$  搬运,否则,  $YDT_{i,j,i',j'}^R = 0$ .

由上述假设可得如下约束关系:

$$t_{s,o_{i,j}} + p_{i,j} \leq t_{s,o_{i',j'}}, \quad (1)$$

$$\forall i \in [1, n], \forall j, j' \in [1, n_i], X_{j,j'}^i = 1;$$

$$\sum_{k=1}^m DP_{i,j}^k = 1, \quad (2)$$

$$\forall i \in [1, n], \forall j \in [1, n_i].$$

当两个工序  $O_{i,j}$  和  $O_{i',j'}$  共用一台机床时,约束关系可表示为

$$t_{s,o_{i,j}} + p_{i,j} \leq t_{s,o_{i',j'}} + (1 - YDP_{i,j,i',j'}^k) \times Q, \quad (3)$$

$$DP_{i,j}^k \times DP_{i',j'}^k \times (t_{s,o_{i',j'}} + p_{i',j'}) \leq t_{s,o_{i,j}} + YDP_{i,j,i',j'}^k \times Q, \quad (4)$$

$$\forall i, i' \in [1, n], \forall j \in [1, n_i], j' \in [1, n_{i'}].$$

工序  $T_{i,j}$  和  $T_{i',j'}$  共用搬运设备  $R$  搬运,约束关系可表示为

$$t_{s,i,j} + t_{k,k_1}^L + t_{k_1,k'}^E \leq t_{s,i',j'} + (1 - YDT_{i,j,i',j'}^R) \times Q, \quad (5)$$

$$t_{s,i',j'} + t_{k',k'_1}^L + t_{k'_1,k}^E \leq t_{s,i,j} + YDT_{i,j,i',j'}^R \times Q. \quad (6)$$

$$\forall i, i' \in [1, n], \forall j \in [1, n_i], \forall j' \in [1, n_{i'}], \forall k, k_1, k', k'_1 \in [1, m],$$

$$DP_{i,j}^k = 1, DP_{i,j+1}^k = 1, DP_{i',j'}^{k'} = 1, DP_{i',j'+1}^{k'} = 1.$$

搬运设备要有足够的时间完成两个连续搬运任务,约束关系可以表示为

$$t_{s,o_{i,j}} + p_{i,j} + t_{k,k'}^L \leq t_{s,o_{i,j+1}}. \quad (7)$$

$$\forall i \in [1, n], \forall j \in [1, n_i - 1], DP_{i,j}^k = 1,$$

$$DP_{i,j+1}^{k'} = 1.$$

调度目标为

$$\min \{ \max_{i \in [1, n]} \{ t_{f,i} \} \}. \quad (8)$$

本文的调度问题是以式 (8) 为目标,以式 (1) ~ 式 (7) 为约束条件的非线性规划问题.

为了更清晰表述上述调度问题,对析取图模型进行改进,利用  $G = (N_m \cup N_t, C \cup D_m \cup D_R)$  进行建模.  $N_m$  表示加工工序对应的节点集合;  $N_t$  表示搬运工序对应的节点集合;  $C$  是连接弧集合,表示工序顺序;析取边  $D_m$  表示在同一台机床上完成的工序之间的约束关系;析取边  $D_R$  表示搬运工序之间的约束关系.

加工工序节点指向运输工序节点的弧的权值为加工工序的加工时间. 运输节点指向加工节点的弧的权值为运输时间. 析取边  $D_m$  转为有向弧之后,权值等于有向弧始端的工序的加工时间,析取边  $D_R$  转为有向弧之后,权值计算见图 1.

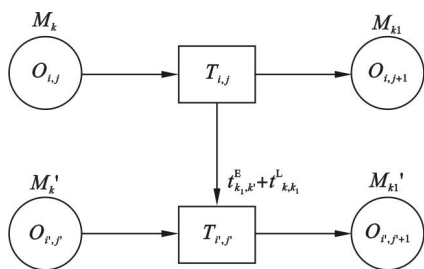


图 1 运输节点之间析取弧权值

Fig. 1 The weight of the disjunctive arc between transportation nodes

## 2 算法构建

析取子图<sup>[9]</sup>是从析取全图中分离出来的图形,可以更清晰地表述子问题.用  $M_0$  表示已调度的机床集合,初始值为空集, $M$  表示所有机床集合, $SG(m)$  表示机床  $m$  的析取子图, $AS(m)$  表示析取子图  $SG(m)$  中所有节点集合, $US(m)$  表示  $SG(m)$  中未调度节点集合, $URS(m)$  表示  $SG(m)$  中可以调度的节点集合, $S(m)$  表示  $SG(m)$  中已经调度的节点集合.用最长路径算法计算各节点的投放时间  $r_{i,j}$  和工期  $d_{i,j}$ ,  $t_{i,j}$  表示节点的实际开始加工时间,  $t_{f,i,j}$  表示完成时间.

**定理 1** 调度析取子图  $SG(m)$  时,如果优先调度的节点  $O_{i,j}$  满足  $r_{i,j} \geq \min_{O_{i',j'} \in US(m)} (\max(t_{i',j'}, r_{i',j'}) + p_{i',j'})$ , 则析取子图的最大完工时间  $t_{f,max}$  会增加.

证明: 设  $O_{i',j'}$  是使不等式右侧式子值最小的节点,  $O_{i,j}$  满足  $r_{i,j} \geq \max(t_{i',j'}, r_{i',j'}) + p_{i',j'}$ .

若优先调度  $O_{i,j}$ , 易知  $t_{i,j} = r_{i,j}$ ,  $t_{f,i,j} = r_{i,j} + p_{i,j}$ . 因为  $r_{i,j} \geq \max(t_{i',j'}, r_{i',j'}) + p_{i',j'}$ , 所以  $t_{f,i,j} > r_{i',j'}$ ,  $t_{f,i,j} = t_{f,i,j}$ ,  $t_{f,i',j'} = t_{i',j'} + p_{i',j'} = r_{i,j} + p_{i,j} + p_{i',j'}$ . 故  $t_{f,max1} = \max(t_{f,i,j}, t_{f,i',j'}) = r_{i,j} + p_{i,j} + p_{i',j'}$ .

若优先调度  $O_{i',j'}$ , 易知,  $t_{i',j'} = r_{i',j'}$ ,  $t_{f,i',j'} = r_{i',j'} + p_{i',j'}$ , 因为  $r_{i,j} \geq \max(t_{i',j'}, r_{i',j'}) + p_{i',j'}$ , 所以  $r_{i,j} > t_{f,i',j'}$ ,  $t_{i,j} = r_{i,j}$ ,  $t_{f,i,j} = r_{i,j} + p_{i,j}$ . 故  $t_{f,max2} = \max(t_{f,i,j}, t_{f,i',j'}) = r_{i,j} + p_{i,j}$ .

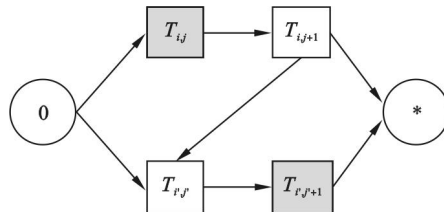
显然,  $t_{f,max1} > t_{f,max2}$ , 即析取子图的最大完工时间  $t_{f,max}$  增加.

**定理 2** 调度析取子图  $SG(m)$  时, 设  $r_{i,j}^d$  表示当前调度时刻节点  $T_{i,j}$  的动态投放时间, 如果优先调度  $r_{i,j}^d$  最小的节点, 则必然能得到可行解.

证明: 图 2 表示当前状态下的析取子图  $SG(R)$  局部简图, 当前未调度节点集合为  $\{T_{i,j}, T_{i',j'+1}\}$ .  $p(0 \rightarrow x \rightarrow T_{i',j'+1})$  表示从起点 0 到节点  $T_{i',j'+1}$  的所有路径的集合,  $l(p)$  表示路径  $p$  的长

度,  $r_{i',j'+1}^d = \max\{l(p) | p \in p(0 \rightarrow x \rightarrow T_{i',j'+1})\}$ . 又因为当前析取子图中, 存在路径  $p(0 \rightarrow T_{i,j} \rightarrow T_{i,j+1} \rightarrow T_{i',j'} \rightarrow T_{i',j'+1}) \in p(0 \rightarrow x \rightarrow T_{i',j'+1})$ , 所以,  $r_{i',j'+1}^d \geq l(p(0 \rightarrow T_{i,j} \rightarrow T_{i,j+1} \rightarrow T_{i',j'} \rightarrow T_{i',j'+1})) >$

$l(p(0 \rightarrow T_{i,j})) = r_{i,j}^d$ . 所以, 若按照  $r_{i,j}^d$  对节点进行排序, 则  $T_{i,j}$  必然排在  $T_{i',j'+1}$  之前, 这样可以避免析取子图中出现环, 即必然能得到可行解.

图 2  $SG(R)$  局部简图Fig. 2 Partial diagram of  $SG(R)$ 

**定理 3**<sup>[2]</sup>  $s$  是一个可行解, 最大完工时间为  $t_{f,max}(s)$ , 如果存在另一个可行解  $s'$ , 有  $t_{f,max}(s') < t_{f,max}(s)$ , 那么有 1) 某个机床块中, 至少有一个节点排在首节点之前或者在尾节点之后; 2) 搬运块中至少有两道搬运工序可交换顺序.

基于以上 3 个定理, 构造了两阶段结构式启发式算法, 算法构造描述如下.

步骤 1 创建析取图并初始化.

步骤 2 根据机床总负载  $TWL = \sum p_{i,j}$  从大到小, 确定机床调度顺序.

步骤 3 按照机床调度顺序, 确定机床  $m$  的析取子图  $SG(m)$ .

步骤 4 调度  $SG(m)$ .

1) 初始化  $US(m) = AS(m)$ ,  $URS(m) = S(m) = \emptyset$ ;

2) 若  $S(m) = AS(m)$ , 则转步骤 5, 否则,  $URS(m) = \{O_{i,j} | r_{i,j} \leq \min_{O_{i',j'} \in US(m)} \{\max(t_{i',j'}, r_{i',j'}) + p_{i',j'}\}, O_{i,j} \in US(m)\}$ ;

3) 对  $URS(m)$  中的所有节点, 按照  $d_{i,j}$  从小到大的顺序进行排列, 所得序列中的节点为  $O_{i,j}$ , 更新  $S(m) = S(m) \cup O_{i,j}$ ,  $US(m) = US(m) \setminus O_{i,j}$ ,  $URS(m) = \emptyset$ , 转步骤 4 中的 2).

步骤 5 将析取子图  $SG(m)$  调度结果插入析取图中.

步骤 6  $\forall m' \in \{M_0 - m\}$ , 若  $m'$  上的工序出现在关键路径中, 则重新调度  $m'$ , 如果制造期缩短则更新  $m'$  的工序顺序; 否则, 保持  $m'$  的工序顺序不变.

步骤 7 如果  $M_0 \neq M$ , 则转步骤 3.

步骤 8 基于机床调度结果分离搬运设备析

取子图  $SG(R)$ .

步骤 9 调度  $SG(R)$ .

步骤 10 对步骤 1~9 得到的解  $s$  第一层优化.

步骤 11 对  $s$  第二层优化.

步骤 12 算法结束.

### 3 仿真实验

定义  $Gap = \frac{t_{f,max}^B - t_{f,max}}{t_{f,max}^B} \times 100\%$ , 其中  $t_{f,max}^B$  表

示利用文献[9]提出的改进转换瓶颈算法 (MSBH) 所求得的最大完工时间.

$pror = \bar{t}/\bar{p}$  表征搬运时间平均值  $\bar{t}$  和加工时间

平均值  $\bar{p}$  比值. 其中  $\bar{t} = \bar{t}^L + \bar{t}^E$ ,  $\bar{t}^L = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} T_{i,j}^L}{n \times (m-1)}$ ,  $\bar{t}^E = (t^{E-} + t^{E+})/2$ ;  $T_{i,j}^L$  表示搬运工序  $T_{i,j}$  的负载运输时间;  $T_{i,j}^E$  表示搬运工序  $T_{i,j}$  的空载运输时间;  $t^{E-}$  表示空载运输时间可取的最小值;  $t^{E+}$  表示空

载运输时间可取的最大值;  $\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{i,j}}{n \times m}$ .

用  $m \times n \times 1$  表示问题规模, 参考文献[2-3]设计  $4 \times 4 \times 1$ ,  $6 \times 6 \times 1$ ,  $10 \times 5 \times 1$  三种中小规模算例和  $15 \times 5 \times 1$ ,  $10 \times 10 \times 1$  两种大规模算例.  $4 \times 4 \times 1$ ,  $6 \times 6 \times 1$  类算例的加工时间  $p_{i,j} = [1, 10]$ ;  $10 \times 5 \times 1$ ,  $15 \times 5 \times 1$ ,  $10 \times 10 \times 1$  类算例的  $p_{i,j} = [1, 100]$ . 各规模算例的运输时间设置如下:  $T_{i,j}^L = [0, \bar{p}]$ ,  $T_{i,j}^E = D |cur - k|$ .  $cur$  表示当前调度时刻搬运设备所处的机床序号;  $k$  表示当前调度时刻待搬运工件所处的机床序号;  $D$  为空载运输时间系数,  $D = [0, \lfloor \frac{\bar{p}}{m-1} \rfloor]$ .

用 C++ 语言编程实现上述算法, 并在硬件环境为 320 G 硬盘、2 GB RAM 和 2.27 GHz 主频 intel core(TM) i3 处理器的 Lenovo 笔记本电脑上进行仿真实验.

#### 3.1 问题规模对算法的影响

设定  $pror = 0.2$ , 设计各问题规模的实例, 实验结果见图 3.

从图 3 可以看出, 当  $pror = 0.2$  时, 随着问题规模的增大, Gap 值在 10% ~ 21% 之间波动, 趋于平稳. 总体来看, 算法求解质量相对稳定, 且相比文献[9]中的算法优势较显著.

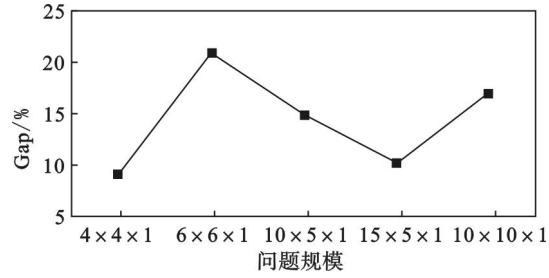


图 3 问题规模对算法运行时间的影响

Fig. 3 Influence of problem scales on algorithm running time

#### 3.2 搬运时间对算法的影响

令  $pror$  取  $[0, 1]$  区间内不同的值, 对不同规模的算例进行多次仿真实验, 分析搬运时间对算法的影响, 见图 4 和图 5.

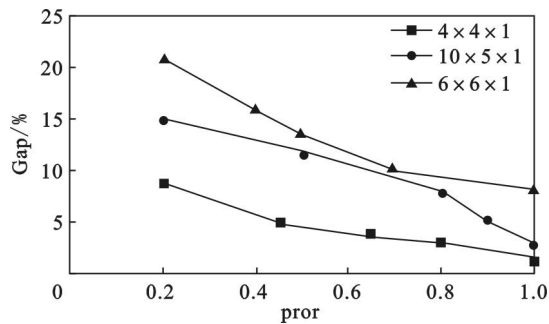


图 4 中小问题规模搬运时间对算法运行时间的影响

Fig. 4 Influence of transporting time in small and medium problem scales on algorithm running time

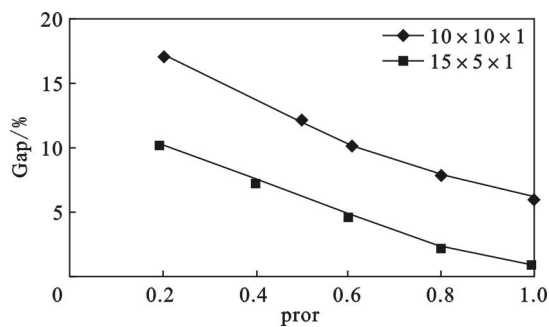


图 5 大问题规模搬运时间对算法运行时间的影响

Fig. 5 Influence of transporting time in large problem scales on algorithm running time

由图 4 和图 5 可知, 随着搬运时间与加工时间的比值  $pror$  的增大, Gap 值呈减小趋势. 当  $pror$  小于 0.5 时, Gap 值在 5% ~ 20% 之间, 算法相对文献[9]中的算法的优势比较明显, 求解质量较高. 当  $pror$  大于 0.5 小于 1 时, 两种算法所求结果的差异较小. 实际的生产中, 搬运时间一般小于加工时间的 50%, 即  $pror$  小于 0.5, 因此, 本文算法有较高的实用价值.



## 4 结 论

1) 在构建数学模型和改进型析取图的基础上,提出的两阶段构造式启发式算法能够有效地求解带物料搬运设备的 Job Shop 调度问题,为此类问题的调度提供了新思路。

2) 仿真结果表明,当搬运时间与加工时间的比值  $\text{pror}$  一定时,算法的求解质量相对稳定,并且能够较好地平衡求解质量和求解时间之间的矛盾。

3) 搬运时间与加工时间的比值  $\text{pror}$  小于 0.5 时,本文算法与文献[9]的算法的 Gap 值在 5% ~ 20% 之间,求解质量明显高于文献[9]。

### 参考文献:

- [1] Schutten J M J. Practical job shop scheduling[J]. *Annals of Operations Research*, 1998, 83(2): 161 – 178.
- [2] Hurink J, Knust S. Tabu search algorithms for job-shop problems with a single transport robot[J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, 162(1): 99 – 111.
- [3] 何之洲,杨煜俊,陈新度. 带搬运机器人的 job-shop 问题的并行禁忌搜索算法[J]. 工业工程, 2013, 16(4): 122 – 125. (He Zhi-zhou, Yang Yu-jun, Chen Xin-du. Parallel tabu search scheduling algorithm for job-shop with transport robot[J]. *Industrial Engineering Journal*, 2013, 16(4): 122 – 125.)
- [4] 晏鹏宇,车阿大,李鹏,等. 具有柔性加工时间的机器人制

造单元调度问题改进遗传算法[J]. 计算机集成制造系统, 2010, 16(2): 404 – 410.

(Yan Peng-yu, Che A-da, Li Peng, et al. Improved genetic algorithm for robotic cell scheduling problem with flexible processing time [J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2010, 16(2): 404 – 410.)

- [5] Blazewicz J, Pesch E, Sterna M. Application of a modified disjunctive graph for the job shop scheduling problem [C] // *Proceedings of the Fourth International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics*. Miedzyzdroje, 1997: 935 – 940.
- [6] Lacomme P, Larabi M, Tchernev N. Job-shop based framework for simultaneous scheduling of machines and automated guided vehicles [J]. *International Journal of Production Economics*, 2013, 143(1): 24 – 34.
- [7] Deroussi L, Gourgand M, Tchernev N. A simple metaheuristic approach to the simultaneous scheduling of machines and automated guided vehicles [J]. *International Journal of Production Research*, 2008, 46(8): 2143 – 2164.
- [8] Zhang Q, Manier H, Manier M A. A genetic algorithm with tabu search procedure for flexible job shop scheduling with transportation constraints and bounded processing time [J]. *Computers & Operations Research*, 2012, 39(7): 1713 – 1723.
- [9] Driessel R, Mönch L. An integrated scheduling and material-handling approach for complex job shops: a computational study [J]. *International Journal of Production Research*, 2012, 50(20): 5966 – 5985.

(上接第 126 页)

二次抛物线增长关系. 而冻结尾矿的变形模量与平均粒径呈自然对数关系, 同样与干密度亦呈指数函数关系, 与含水率则呈二次抛物线关系, 与加载速率呈指数函数增长关系。

### 参考文献:

- [1] Wijeweera H, Joshi R C. Compressive strength behavior of fine grained frozen soils [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1990, 27(3): 472 – 483.
- [2] Christ M, Kim Y C. Experimental study on the physical-mechanical properties of frozen silt [J]. *Geotechnical Engineering*, 2009, 13(5): 317 – 324.
- [3] Lai Y M, Xu X T, Dong Y H, et al. Present situation and prospect of mechanical research on frozen soils in China [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2013, 87(3): 6 – 18.
- [4] 李海鹏,林传年,张俊兵,等. 饱和冻结黏土在常应变率下的单轴抗压强度[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(1): 105 – 109. (Li Hai-peng, Lin Chuan-nian, Zhang Jun-bing, et al. Uniaxial compressive strength of saturated frozen clay at constant strain rate [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2004, 26(1): 105 – 109.)
- [5] 刘增利,张小鹏,李洪升. 原位冻结黏土单轴压缩试验研究

[J]. 岩土力学, 2007, 28(12): 2657 – 2660.

(Liu Zeng-li, Zhang Xiao-peng, Li Hong-sheng. Experimental study of uniaxial compression of clay frozen in situ [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 28(12): 2657 – 2660.)

- [6] Yang Y G, Lai Y M, Chang X X. Laboratory and theoretical investigations on the deformation and strength behaviors of artificial frozen soil [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2010, 64(7): 39 – 45.
- [7] Dixon-Hardy D W, Engels J M. Guidelines and recommendations for the safe operation of tailings management facilities [J]. *Environmental Engineering Science*, 2007, 24(5): 625 – 637.
- [8] Yin G Z, Li G Z, Wei Z A, et al. Stability analysis of a copper tailings dam via laboratory model tests: a Chinese case study [J]. *Minerals Engineering*, 2011, 24(2): 122 – 130.
- [9] Wei Z A, Yin G Z, Wang J G, et al. Design, construction and management of tailings storage facilities for surface disposal in China: case studies of failures [J]. *Waste Management & Research*, 2013, 31(1): 106 – 112.
- [10] 刘石桥,陈章友,张曾. 冬季高寒地区冻土对尾矿库的危害及防治措施[J]. 工程建设, 2008, 40(1): 22 – 26. (Liu Shi-qiao, Chen Zhang-you, Zhang Zeng. Harm of frozen earth to tailing reservoir in high-cold area in winter and its prevention and control measures [J]. *Engineering Construction*, 2008, 40(1): 22 – 26.)