

# 执行器饱和的随机 Markov 切换系统的观测器设计

高宪文<sup>1</sup>, 杜津名<sup>1,2</sup>, 齐文海<sup>1</sup>

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 中国人民解放军 93116 部队, 辽宁 沈阳 110141)

**摘 要:** 利用直接法对转移概率是部分未知的, 并且具有执行器饱和现象的随机 Markov 切换系统进行稳定性分析. 通过引入自由连接权重矩阵降低系统的保守性. 首先, 针对此类随机 Markov 切换系统, 充分考虑转移概率中元素之间的特性, 通过构建参数依赖型 Lyapunov 函数, 并设计观测器确保闭环饱和系统的随机稳定性. 然后, 在线性矩阵不等式的框架下, 得到均方意义下的最大不变吸引域, 并将其归结为求解一组线性矩阵不等式的可行性问题. 最后, 数值仿真算例验证本方法的有效性.

**关 键 词:** Markov 切换系统; 转移概率部分未知; 执行器饱和; 随机稳定性; 观测器

**中图分类号:** TP 13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2016)01-0001-05

## Observer Design for Stochastic Markov Switching Systems with Actuator Saturation

GAO Xian-wen<sup>1</sup>, DU Jin-ming<sup>1,2</sup>, QI Wen-hai<sup>1</sup>

(1. School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Unit of 93116, PLA, Shenyang 110141, China. Corresponding author: DU Jin-ming, E-mail: dujinming19840521@163.com)

**Abstract:** The direct approach was used to study the stochastic Markov switching system with partly unknown transition probabilities and actuator saturation considering the problem of stochastic stability analysis. Through using free connection weight matrix, the conservatism of the system would be decreased. Firstly, for stochastic Markov switching systems, by considering the properties of the relationship between the transition probabilities, the observer was designed to guarantee the stochastic stability of the closed-loop saturated system based on the parameter-dependent Lyapunov function. And then, the largest contraction invariant set in the mean square sense was proposed in the framework of linear matrix inequalities (LMIs). Finally, a numerical example was given to demonstrate the effectiveness of the method.

**Key words:** Markov switching systems; partly unknown transition probabilities; actuator saturation; stochastic stability; observer

作为一类混杂系统, 随机 Markov 切换系统由微分(或者差分)方程组、Itô 型随机干扰和 Markov 过程(或者 Markov 链)组成. 这类系统已被广泛研究, 并取得了许多成果<sup>[1]</sup>. 实际中的控制系统, 由于某些随机因素的突然变化, 可以描述为 Markov 切换系统, 例如经济系统、网络控制系统、容错控制系统等. 作为关键性的因素, 转移概率决定了 Markov 切换系统的性能. 关于 Markov 切换系统的分析和综合, 大多建立在假

设转移概率完全已知的情况下. 在实际情况下, 由于各种复杂因素, 转移概率不可能完全得到. 因此, 转移概率部分未知的随机 Markov 切换系统已经成为研究热点<sup>[2-4]</sup>.

另一方面, 由于物理限制或安全因素的考虑, 执行器饱和会出现在实际的控制系统中. 由于执行器饱和的存在, 会导致系统的性能下降或者闭环系统的不稳定. 许多学者对于执行器饱和问题进行了研究, 例如线性系统执行器饱和的稳

定性分析和控制器设计方法<sup>[5]</sup>、吸引域的估计问题<sup>[6]</sup>. 近年来, 执行器饱和的 Markov 切换系统的稳定性分析和控制器设计已有部分文献报道<sup>[7-8]</sup>.

跳变和随机理论方面的最新研究成果包括有限时间稳定<sup>[9]</sup>、模糊控制<sup>[10]</sup>、神经网络<sup>[11]</sup>等. 通过上面的分析, 关于执行器饱和的随机 Markov 切换系统的观测器设计问题还有待深入的研究. 通过采用 Lyapunov 函数, 保证了闭环饱和系统的随机稳定性. 在此基础上, 设计了基于状态反馈的观测器, 并且得到了均方意义下吸引域的估计值. 最后, 数值算例验证了该方法的有效性.

## 1 系统描述

考虑如下随机 Markov 切换系统:

$$\left. \begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{x}(t) &= [\mathbf{A}(g_t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(g_t)\mathrm{sat}(\mathbf{u}(t))] \mathrm{d}t + \\ &\quad \mathbf{W}(g_t)\mathbf{x}(t) \mathrm{d}w(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_y(g_t)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  是状态向量;  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  是控制输入;  $w(t)$  是标准维纳过程;  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^q$  是测量输出;  $\mathbf{x}_0, g_0, t_0$  分别是初始状态、初始模态和初始时间,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, g_{t_0} = g_0, t_0 = 0$ ;  $\mathbf{A}(g_t), \mathbf{B}(g_t), \mathbf{W}(g_t), \mathbf{C}_y(g_t)$  是已知模态依赖的适当维数的常数矩阵;  $\mathrm{sat}(\cdot)$  函数是向量值标准饱和函数:

$$\mathrm{sat}(\mathbf{u}) = [\mathrm{sat}(u_1) \ \mathrm{sat}(u_2) \ \cdots \ \mathrm{sat}(u_m)]^T. \quad (2)$$

式中,  $\mathrm{sat}(u_i) = \mathrm{sign}(u_i) \min\{1, |u_i|\}$  为符号函数.

$g_t$  为有限集  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  中取值的连续 Markov 过程. 从  $t$  时刻模态  $i$  到  $t + \Delta t$  时刻模态  $j$  的转移概率:

$$P\{g_{t+\Delta t} = j | g_t = i\} = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & i \neq j; \\ \pi_{ii}\Delta t + o(\Delta t), & i = j. \end{cases}$$

$$\Delta t > 0, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (o(\Delta t)/\Delta t) = 0, \pi_{ij} \geq 0,$$

$$\text{当 } i \neq j, \sum_{j=1, i \neq j}^N \pi_{ij} = -\pi_{ii}.$$

转移概率是建立在部分未知情况下的, 意味着转移概率矩阵  $\Pi = [\pi_{ij}]$  中有一些元素是部分未知的. 对于  $\forall i \in S, S^i = S_k^i + S_{uk}^i$ ,

$$S_k^i = \{j: \pi_{ij} \text{ 是已知的, 对于任意 } j \in S\},$$

$$S_{uk}^i = \{j: \pi_{ij} \text{ 是未知的, 对于任意 } j \in S\}.$$

如果  $S^i \neq \emptyset$ , 可以描述为  $S_k^i = \{k_1^i, k_2^i, \dots, k_m^i\}$ ,  $1 \leq m \leq N$ . 其中  $k_m^i \in S$  代表矩阵  $\Pi$  第  $i$  行中

序号为  $k_m^i$  的第  $m$  个已知元素. 本文构造  $n$  维观测器状态:

$$\left. \begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{x}_c(t) &= [\mathbf{A}(g_t)\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}(g_t)\mathrm{sat}(\mathbf{u}(t)) - \\ &\quad \mathbf{H}(g_t)\mathbf{C}_y(g_t)(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c(t))] \mathrm{d}t + \\ &\quad \mathbf{W}(g_t)\mathbf{x}_c(t) \mathrm{d}w(t), \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{K}(g_t)\mathbf{x}_c(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{x}_c(t) \in \mathbf{R}^n$  是估计状态;  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$  是控制输入;  $\mathbf{x}_{c0}, g_0, t_0$  分别是估计初始状态、初始模态和初始时间;  $\mathbf{x}_c(t_0) = \mathbf{x}_{c0}, g_{t_0} = g_0, t_0 = 0$ ;  $\mathbf{K}(g_t)$  是状态反馈增益;  $\mathbf{H}(g_t)$  是观测器增益. 定义矩阵中的符号为  $g_t = i$ .

定义状态估计误差:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c(t) \text{ 和 } \boldsymbol{\xi}(t) = [\mathbf{x}^T(t) \ \mathbf{e}^T(t)]^T \in \mathbf{R}^{2n}.$$

对于正定对称矩阵  $\mathbf{P}_i > 0$ , 定义椭圆集合

$$\zeta(\mathbf{P}_i) = \{\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbf{R}^{2n}: \boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi}(t) \leq 1\};$$

给定一组矩阵  $\mathbf{F}_i$ , 定义多面体集合

$$\psi(\mathbf{F}_i) = \{\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbf{R}^{2n}: |f_{ij}\boldsymbol{\xi}(t)| \leq 1, j = 1, 2, \dots, m\}, f_{ij} \text{ 为矩阵 } \mathbf{F}_i \text{ 的第 } j \text{ 行}.$$

引理 1<sup>[6]</sup>: 对于已知矩阵  $\tilde{\mathbf{K}}_i, \mathbf{F}_i \in \mathbf{R}^{m \times 2n}$ , 如果  $\boldsymbol{\xi}(t) \in \psi(\mathbf{F}_i)$ , 则  $\sigma(\tilde{\mathbf{K}}_i \boldsymbol{\xi}(t))$  可表示为

$$\sigma(\tilde{\mathbf{K}}_i \boldsymbol{\xi}(t)) = \sum_{v=1}^{2^m} \eta_v (\mathbf{U}_v \tilde{\mathbf{K}}_i + \mathbf{U}_v^- \mathbf{F}_i) \boldsymbol{\xi}(t),$$

其中:  $0 \leq \eta_v \leq 1; \sum_{v=1}^{2^m} \eta_v = 1$ .

$\psi(\mathbf{F}_i) = \{\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbf{R}^{2n}: |f_{ij}\boldsymbol{\xi}(t)| \leq 1, j = 1, 2, \dots, m\}$ ,  $f_{ij}$  为矩阵  $\mathbf{F}_i$  的第  $j$  行. 其中  $\mathbf{U}_v$  表示一个  $m \times m$  阶对角元素不是 1 就是 0 的对角矩阵集. 该集合中有  $2^m$  个元素, 其中每个元素表示为  $\mathbf{U}_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, 2^m$ , 令  $\mathbf{U}_v^- = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_v)$ , 如果  $\mathbf{U}_v^-$  在这个集合内, 那么  $\mathbf{U}_v$  也在这个集合内.

定义

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = [\mathbf{K}_i \quad -\mathbf{K}_i], \mathbf{F}_i = [\mathbf{F}_{1i} \ \mathbf{F}_{1i}], \mathbf{K}_i, \mathbf{F}_{1i} \in \mathbf{R}^{m \times n}.$$

由此可得

$$\mathrm{sat}(\mathbf{K}_i \mathbf{x}_c(t)) = \mathrm{sat}(\tilde{\mathbf{K}}_i \boldsymbol{\xi}(t)) =$$

$$\sum_{v=1}^{2^m} \eta_v [\mathbf{U}_v \mathbf{K}_i + \mathbf{U}_v^- \mathbf{F}_{1i} \quad -\mathbf{U}_v \mathbf{K}_i + \mathbf{U}_v^- \mathbf{F}_{1i}] \boldsymbol{\xi}(t).$$

基于状态反馈的观测器 (3), 可得闭环误差随机 Markov 切换系统如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t) &= \sum_{v=1}^{2^m} \eta_v \tilde{\mathbf{A}}_i \boldsymbol{\xi}(t) \mathrm{d}t + \tilde{\mathbf{W}}_i \boldsymbol{\xi}(t) \mathrm{d}w(t), \\ \boldsymbol{\xi}(t_0) &= \boldsymbol{\xi}_0, g_{t_0} = g_0, t_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中,

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_{li} & -B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_{li} \\ \mathbf{0} & A_i + H_i C_{yi} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{W}_i = \begin{bmatrix} W_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_i \end{bmatrix}.$$

**定义 1** 在任意的初始模态  $g_0 \in S$ , 初始状态  $\xi_0 \in \ell$ ,  $\ell \subset \mathbf{R}^{2n}$  下, 存在一个正的标量参数  $T$  ( $\xi_0, g_0$ ) 使得

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^{T_f} \|\xi(t)\|^2 dt \mid \xi_0, g_0 \right\} \leq T(\xi_0, g_0). \quad (5)$$

那么集合  $\ell \subset \mathbf{R}^{2n}$  被称为随机 Markov 切换系统(4)均方意义下的吸引域.

**定义 2**<sup>[1]</sup> 定义随机 Markov 饱和切换系统(4)的 Lyapunov 函数为  $V(\xi(t), i)$ , 其无穷小算子为

$$\Gamma(V(\xi(t), i)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [E\{V(\xi(t + \Delta t), g(t + \Delta t)) \mid \xi(t), g(t) = i\} - V(\xi(t), g(t) = i)].$$

## 2 观测器设计

首先, 考虑随机 Markov 切换系统(4)的稳定性.

**定理 1** 转移概率部分未知的闭环随机 Markov 切换系统(4)是随机稳定的, 如果存在对称正定矩阵  $P_i \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  以及对称矩阵  $Q_i \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ , 对于  $\forall i \in S$ , 使得下列不等式成立:

$$\tilde{A}_i^T P_i + P_i \tilde{A}_i + \tilde{W}_i^T P_i \tilde{W}_i + \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} (P_j - Q_i) \leq 0, \quad (6)$$

$$(P_j - Q_i) \leq 0, j \in S_{uk}^i, j \neq i, \quad (7)$$

$$(P_j - Q_i) \geq 0, j \in S_{uk}^i, j = i, \quad (8)$$

$$\zeta(P_i) \in \psi(F_i). \quad (9)$$

此外, 集合  $\cap_{i=1}^N \zeta(P_i)$  包含闭环系统在均方意义下的吸引域.

证明: 对于系统(4), 选择 Lyapunov 函数:

$$V(\xi(t), i) = \xi^T(t) P_i \xi(t), \quad (10)$$

其中  $P_i > 0$ . 由条件(9)得出, 若  $\xi(t) \in \cap_{i=1}^N \zeta(P_i)$ , 则有  $\xi(t) \in \psi(F_i)$ . 由定义 2 可得无穷小算子

$$\Gamma(V(\xi(t), i)) = \sum_{v=1}^{2m} \eta_v \xi^T(t) [\tilde{A}_i^T P_i + P_i \tilde{A}_i + \tilde{W}_i^T P_i \tilde{W}_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j] \xi(t).$$

由于  $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} Q_i = 0$ , 其中  $Q_i$  为对称矩阵, 则

$$\Gamma(V(\xi(t), i)) = \sum_{v=1}^{2m} \eta_v \xi^T(t) [\tilde{A}_i^T P_i + P_i \tilde{A}_i + \tilde{W}_i^T P_i \tilde{W}_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j] \xi(t) + \xi^T(t) \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} (P_j - Q_i) \xi(t) + \xi^T(t) \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} (P_j - Q_i) \xi(t) = \sum_{v=1}^{2m} \eta_v \xi^T(t) \Pi_{ij} \xi(t). \quad (11)$$

对  $\forall j \in S_{uk}^i$ , 若  $i \in S_{uk}^i$ , 由条件(6), 条件(7)和  $\pi_{ij} \geq 0$  ( $\forall i, j \in S, i \neq j$ ) 可得  $\Pi_{ij} < 0$ . 另一方面,

对  $\forall j \in S_{uk}^i$ , 若  $i \in S_{uk}^i$ ,  $\pi_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^N \pi_{ij} < 0$ , 由条件(6) ~ 条件(8) 同样可得  $\Pi_{ij} < 0$ . 所以,

$$\Gamma(V(\xi(t), i)) \leq -\min_{i \in S} \{\lambda_{\min}(-\sum_{v=1}^{2m} \eta_v \Pi_{ij})\} \xi^T(t) \xi(t).$$

最终

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^{T_f} \|\xi(t)\|^2 dt \mid \xi_0, g_0 \right\} \leq T(\xi_0, g_0).$$

综上所述, 转移概率部分未知的随机 Markov 切换系统(4)是随机稳定的, 集合  $\cap_{i=1}^N \zeta(P_i)$  包含闭环系统在均方意义下的吸引域. 证明完毕.

其次, 设计基于状态反馈的观测器(3)获得随机 Markov 切换系统(4)在均方意义下的最大吸引域. 对于  $\cap_{i=1}^N \zeta(P_i)$  的大小由参数  $\chi_R$  取最大  $\alpha$  通过  $\alpha \chi_R \subset \cap_{i=1}^N \zeta(P_i)$  得到. 通常取椭球体  $\chi_R = \{\xi \in \mathbf{R}^{2n} : \xi^T R_{11} \xi \leq 1, R_{11} > 0\}$ . 此外, 可以解决估计集合  $\cap_{i=1}^N \zeta(P_i)$  最大值优化问题.

$$\left. \begin{aligned} & \sup \quad \alpha \\ & \text{s. t.} \quad (I) \quad \alpha \chi_R \subset \cap_{i=1}^N \zeta(P_i); \\ & \quad \quad (II) \quad \text{不等式(6) ~ (9)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{令 } \beta = \alpha^{-2}, X_i = P_i^{-1}, R_i = F_{1i} X_{1i},$$

$$V_i = X_i Q_i X_i, Y_i = K_i X_{1i}, H_i = X_{1i} C_{yi}^T,$$

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{1i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_{2i} \end{bmatrix}, V_i = \begin{bmatrix} V_{1i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{2i} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_{11} \end{bmatrix}.$$

通过 Schur 补引理, 不等式(9)等价于

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{1i} & \mathbf{0} & R_{iq}^T \\ * & -X_{1i} & R_{iq}^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} \leq 0, q = 1, 2, \dots, m; \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

其中  $R_{iq}$  表示  $R_i$  第  $q$  行.

通过 Schur 补引理, 条件( I )等价于

$$\begin{bmatrix} \beta R_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & \beta R_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ * & * & X_{1i} & \mathbf{0} \\ * & * & * & X_{1i} \end{bmatrix} > 0, i=1, \dots, N. \quad (14)$$

对不等式(6)左乘和右乘  $X_i$ , 通过 Schur 补引理, 可得

$$\begin{bmatrix} \Pi_{50} & \Pi_{51} & \mathbf{0} & X_{1i} W_i^T & \mathbf{0} \\ * & \Pi_{52} & X_{1i} C_{yi}^T & \mathbf{0} & X_{1i} W_i^T \\ * & * & -1/2I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -X_{1i} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -X_{1i} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (15)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi_{50} &= X_{1i} A_i^T + A_i X_{1i} + Y_i^T U_v B_i^T + B_i U_v Y_i + R_i^T U_v^- B_i^T + \\ & B_i U_v^- R_i + \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} X_{1i} X_{1j}^{-1} X_{1i} - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} V_{1i}; \\ \Pi_{51} &= -B_i U_v Y_i + B_i U_v^- R_i; \\ \Pi_{52} &= X_{1i} A_i^T + A_i X_{1i} + \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} X_{1i} X_{1j}^{-1} X_{1i} - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} V_{1i}. \end{aligned}$$

接下来, 讨论式(15)的两种不同情况.

情况 1 对于  $i \in S_k^i$ , 通过 Schur 补引理, 不等式(15)等价于

$$\begin{bmatrix} \Pi_{53} & \Pi_{54} & \mathbf{0} & X_{1i} W_i^T & \mathbf{0} & \Pi_{56} & \mathbf{0} \\ * & \Pi_{55} & X_{1i} C_{yi}^T & \mathbf{0} & X_{1i} W_i^T & \mathbf{0} & \Pi_{56} \\ * & * & -1/2I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -X_{1i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -X_{1i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & \Pi_{57} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & \Pi_{57} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{53} &= X_{1i} A_i^T + A_i X_{1i} + Y_i^T U_v B_i^T + B_i U_v Y_i + R_i^T U_v^- B_i^T + \\ & B_i U_v^- R_i + \pi_{ii} X_{1i} - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} V_{1i}, \\ \Pi_{54} &= -B_i U_v Y_i + B_i U_v^- R_i, \\ \Pi_{55} &= X_{1i} A_i^T + A_i X_{1i} - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} V_{1i}, \\ \Pi_{56} &= [\sqrt{\pi_{ik_1^i}} X_{1i}, \dots, \sqrt{\pi_{ik_{l-1}^i}} X_{1i}, \sqrt{\pi_{ik_{l+1}^i}} X_{1i}, \dots, \\ & \sqrt{\pi_{ik_m^i}} X_{1i}], \\ \Pi_{57} &= \text{diag} \{ -X_{1k_1^i}, \dots, -X_{1k_{l-1}^i}, -X_{1k_{l+1}^i}, \dots, \\ & -X_{1k_m^i} \}. \end{aligned}$$

情况 2 对于  $i \notin S_k^i$ , 通过 Schur 补引理, 不等式(15)等价于

$$\begin{bmatrix} \Pi_{58} & \Pi_{59} & \mathbf{0} & X_{1i} W_i^T & \mathbf{0} & \Pi_{61} & \mathbf{0} \\ * & \Pi_{60} & X_{1i} C_{yi}^T & \mathbf{0} & X_{1i} W_i^T & \mathbf{0} & \Pi_{61} \\ * & * & -1/2I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -X_{1i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -X_{1i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & \Pi_{62} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & \Pi_{62} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (17)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi_{58} &= X_{1i} A_i^T + A_i X_{1i} + Y_i^T U_v B_i^T + B_i U_v Y_i + R_i^T U_v^- B_i^T + \\ & B_i U_v^- R_i - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} V_{1i}; \\ \Pi_{59} &= -B_i U_v Y_i + B_i U_v^- R_i; \\ \Pi_{60} &= X_{1i} A_i^T + A_i X_{1i} - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} V_{1i}; \\ \Pi_{61} &= [\sqrt{\pi_{ik_1^i}} X_{1i}, \dots, \sqrt{\pi_{ik_m^i}} X_{1i}]; \\ \Pi_{62} &= \text{diag} \{ -X_{1k_1^i}, \dots, -X_{1k_m^i} \}. \end{aligned}$$

对不等式(7)左乘和右乘  $X_i$ , 通过 Schur 补引理, 可得

$$\begin{bmatrix} -V_{1i} & \mathbf{0} & X_{1i} & \mathbf{0} \\ * & -V_{1i} & \mathbf{0} & X_{1i} \\ * & * & -X_{1j} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -X_{1j} \end{bmatrix} < 0, j \in S_{uk}^i, j \neq i. \quad (18)$$

对不等式(8)左乘和右乘  $X_i$ , 可得

$$\begin{bmatrix} X_{1j} - V_{1j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_{1j} - V_{1j} \end{bmatrix} > 0, j \in S_{uk}^i, j = i. \quad (19)$$

综上所述, 优化问题(12)转变为

$$\begin{aligned} \inf \quad & \beta \\ \text{s. t.} \quad & \text{式(13), 式(14), 式(17) ~ 式(19)}. \end{aligned} \quad (20)$$

若  $\beta_{\min} < 1$  (即  $\alpha_{\max} > 1$ ), 那么初始状态是在均方意义下的, 并且转移概率部分未知的闭环系统是随机稳定的. 此外, 状态反馈控制器增益为  $K_i = Y_i X_{1i}^{-1}$  和观测器增益为  $H_i = X_{1i} C_{yi}^T$ .

### 3 仿真算例

考虑四模态的随机 Markov 切换系统的参数如下所示:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -2.5 & 0.4 \\ 0.5 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1.2 \\ 0.8 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= B_2 = B_3 = B_4 = [1 \quad 1]^T, \\ W_1 &= W_2 = W_3 = W_4 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$C_{y1} = C_{y2} = C_{y3} = C_{y4} = [0.1 \ 0],$$

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = [0.1 \ 0.1]^T,$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = [0.1 \ 0.1],$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 0.1, R_{11} = \text{eye}(2). \text{ 令 } x =$$

$$[x_1 \ x_2]^T, x_c = [x_{c1} \ x_{c2}]^T,$$

$$\text{系统的初始状态为 } x_0 = [-0.5 \ 0.4]^T.$$

$$\text{观测器的初始状态为 } x_{c0} = [0.5 \ -0.4]^T.$$

$$\text{系统的初始模态为 } g_0 = 2.$$

部分未知转移概率矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} -1.5 & ? & ? & 0.9 \\ ? & ? & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & ? & -2.0 & ? \\ 0.2 & ? & 0.3 & ? \end{bmatrix}.$$

求解优化问题 (20), 可得  $\beta = 0.8248, \alpha = 1.1011$ , 状态反馈控制器增益参数和观测器增益参数如下:

$$K_1 = [-0.0028 \ -0.0472], K_2 = [-0.0981 \ -0.0930],$$

$$K_3 = [-0.0034 \ -0.0124], K_4 = [-0.0008 \ -0.0313].$$

$$H_1 = [3.1413 \ -3.1687]^T, H_2 = [2.8118 \ -2.5764]^T,$$

$$H_3 = [0.8288 \ -1.4288]^T, H_4 = [1.9658 \ -1.0557]^T.$$

图 1 为系统模态, 图 2 为系统和观测器状态轨迹.

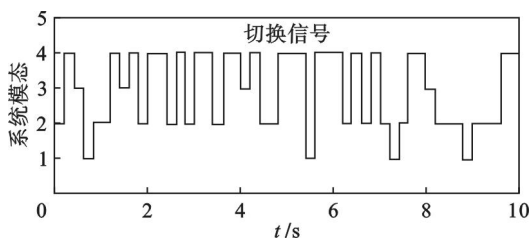


图 1 系统模态  
Fig. 1 System mode

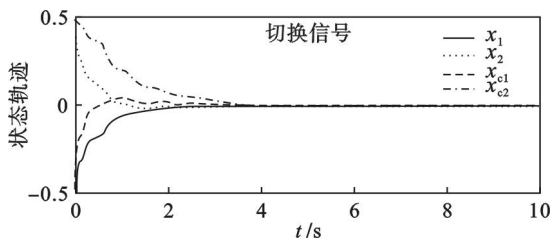


图 2 系统和观测器状态轨迹

Fig. 2 State trajectories of the system and observer

由图可见, 所求解的观测器使得初始状态属于  $\zeta(P_i)$  的系统 (4) 随机稳定. 求解优化问题 (20) 可得  $\beta = 0.7124, \alpha = 1.1848$ , 由此可得完全

已知转移概率能扩大饱和吸引域的范围.

## 4 结 论

本文针对转移概率部分未知的随机 Markov 饱和切换系统, 采用椭圆不变集构造系统均方意义下的稳定域, 完成了基于观测器的状态反馈设计. 在线性矩阵不等式的框架下, 实现了观测器和最大吸引域的求解. 最后, 数值仿真验证了本文方法的有效性.

## 参考文献:

- [1] Chen W H, Xu J X, Guan Z H. Guaranteed cost control for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2270 - 2277.
- [2] Ding Y C, Zhu H, Zhong S M, et al.  $H_\infty$  filtering for stochastic systems with Markovian switching and partly unknown transition probabilities[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2013, 32(2): 559 - 583.
- [3] Liu Y Q, Liu F. Disturbance rejection for Markov jump systems with partly unknown transition probabilities and saturation[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2013, 32(6): 2783 - 2797.
- [4] Zhao J J, Wang J, Shen H. Dynamic anti-windup control design for Markovian jump delayed systems with input saturation[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2013, 32(5): 2213 - 2229.
- [5] Hu T, Lin Z, Chen B M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance[J]. *Automatica*, 2002, 38(2): 351 - 359.
- [6] Zuo Z Q, Wang Y J. On enlarging the domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation[J]. *International Journal of General Systems*, 2008, 37(2): 239 - 248.
- [7] Zuo Z Q, Ho D W C, Wang Y J. Fault tolerant control for singular systems with actuator saturation and nonlinear perturbation[J]. *Automatica*, 2010, 46(3): 569 - 576.
- [8] Li Y, Lin Z. Design of saturation-based switching anti-windup gains for the enlargement of the domain of attraction[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1810 - 1816.
- [9] Ai Z D, Zong G D. Finite-time stochastic input-to-state stability of impulsive switched stochastic nonlinear[J]. *Systems, Applied Mathematics and Computation*, 2014, 245(10): 462 - 473.
- [10] Shen M Q, Ye D. Improved fuzzy control design for nonlinear Markovian-jump systems with incomplete transition descriptions[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2013, 217(4): 80 - 95.
- [11] Wu Z G, Shi P, Su H Y, et al. Stochastic synchronization of Markovian jump neural networks with time-varying delay using sampled-data[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, 43(6): 1796 - 1806.