

# 移动交界面流固耦合传热的数值稳定性分析

赵千里, 孙志礼, 佟 操, 柴小冬

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 研究了交界面移动情况下流固耦合稳态传热的数值稳定性问题. 考虑 Dirichlet – Robin 组合边界条件, 用速度表征交界面的移动情况, 流体域和固体域分别采用有限体积法和有限单元法进行离散及数值求解, 利用 Goudonov – Ryabenkii 理论正则模态分析方法重点研究了交界面移动时数值方法的稳定性, 最终获得了一条由耦合系数和移动速度组成的最优曲线, 并且证明了当耦合系数和移动速度在这条曲线上取值时, 离散的求解域能够达到最快的收敛速度及绝对的稳定性特征. 为设计人员进行数值仿真时选取合理的参数提供了参考.

**关 键 词:** 移动交界面; 耦合传热; 组合边界条件; 稳定性分析; 正则模态

**中图分类号:** TB 61      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2016)02-0222-05

## Numerical Stability Analysis for Fluid Structure Conjugate Heat Transfer on Moving Interface

ZHAO Qian-li, SUN Zhi-li, TONG Cao, CHAI Xiao-dong

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: ZHAO Qian-li, E-mail: zql20081841@163.com)

**Abstract:** The numerical stability of stable heat transfer along moving fluid-structure interface was investigated. Taking the Dirichlet-Robin conditions into account, the interface movement was designated by velocity. The most common configurations (finite volume method for fluid domain and finite element method for solid domain) were used to discretize the fluid-structure system and perform numerical computation, respectively. Great emphasis was put on stability of numerical treatments when the interface moving with the adoption of the Goudonov-Ryabenkii theory normal mode analysis method. An optimal curve composed of coupling coefficient and velocity was finally obtained, which verified that the discrete system would reach fastest convergence rate and definite stability if the values of coupling coefficient and velocity come from this curve. These conclusions will provide a reference for designers to select reasonable parameters during numerical simulation.

**Key words:** moving interface; conjugate heat transfer; combined boundary condition; stability analysis; normal mode

耦合传热描述的是一种热量在流体域和固体域交互传递的物理现象. 这一现象常见于许多工程实际应用中, 如换热器中流体流动带来的热量传递<sup>[1]</sup>, 填充床蓄热式热交换器内部的热量传递<sup>[2]</sup>, 高炉炉缸内部高温铁水和外部冷却循环系统之间的热量传递<sup>[3]</sup>等.

求解流固耦合传热问题一般包括两种方法, 一种是数值模拟法, 另一种是理论分析法. 随着计算机技术在计算速度和精度方面的快速发展, 数值模拟法以其成本低和设计周期短的特点受到广泛欢迎. 目前, 国外学者对与耦合传热相关的数值计算方法已进行了较为丰富的研究<sup>[4-8]</sup>, 而我国

收稿日期: 2014-12-14

基金项目: 国家科技重大专项(2013ZX04011-011).

作者简介: 赵千里(1989-), 男, 江苏常州人, 东北大学博士研究生; 孙志礼(1957-), 男, 山东巨野人, 东北大学教授, 博士生导师.

在这方面的研究还比较欠缺。

在数值计算中,方法的稳定性、效率和精确性是人们最关心的问题。本文基于 Goudonov - Ryabenkii (G - R) 稳定性理论,对一维隐式流固耦合稳态传热问题进行了稳定性分析,采用常用的有限体积法(流体域)(FVM)和有限单元法(固体域)(FEM),应用 Dirichlet - Robin 组合形式的边界条件,重点研究了界面移动时的数值方法的稳定性,最终获得一条由耦合系数和移动速度组成的最优曲线,并且证明了当耦合系数和移动速度在这条曲线上取值时,离散的求解域能够达到最快的收敛速度及恒定的稳定性特征。

## 1 求解域的控制方程及其离散化

为简化问题,流体域和固体域的所有物理参数都假设为常数。稳态问题中,界面移动的情况下,固体的导热微分方程为一维 Laplace 方程:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

流体域的求解需要在时间方向上进行推进,即求解非守恒形式下的 N - S 方程:

$$\rho_f c_f \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_f v_0 \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa_f \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2)$$

式中:  $\rho_f$  为流体密度,  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  $c_f$  为流体比热容,  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ;  $v_0$  为界面移动速度,  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $\kappa_f$  为流体热导率,  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。

除上述单个子域的控制方程外,在界面处,需要满足温度和热流的连续性方程组:

$$\left. \begin{aligned} T_f &= T_s, \\ q_f &= q_s. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中下标 f 和 s 分别代表流体域和固体域。

Roux 等<sup>[9]</sup>已经证明 Dirichlet - Robin 边界条件比 Dirichlet - Neumann 更容易得到收敛结果并能得到更好的稳定性。因此,本文中直接采用这一组合边界条件,将 Dirichlet 条件(温度)作为边界施加到流体域,而 Robin 条件(可视作热流的修正结果)作为边界施加到固体域,此时温度和热流的连续性方程组将变为

$$\left. \begin{aligned} T_f &= T_s, & \text{Dirichlet 条件;} \\ q_s &= q_f - \alpha_{fu} (T_f - T_s), & \text{Robin 条件.} \end{aligned} \right\} 4)$$

式中  $\alpha_{fu}$  为流体耦合系数,  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ 。

在热流计算中暗含了温度梯度与坐标轴正向一致的假设,由于热流方向与温度梯度方向相反,

因此可假设热流方向均与坐标轴负向一致。

对偏微分方程(1)和(2)进行数值计算之前,  $v_0$  需要将流固系统离散化,原理如图1所示。

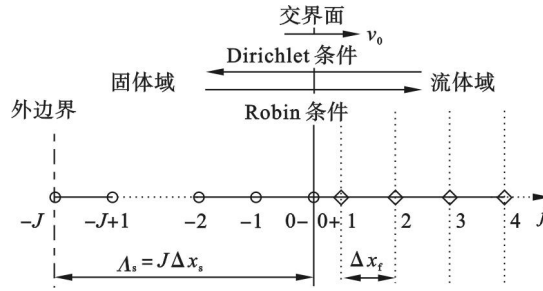


图1 流固系统离散化原理图

Fig. 1 Schematic of fluid-structure system discretization

如图1所示,  $\Delta x_f$  和  $\Delta x_s$  分别为流体域和固体域的空间步长;  $L_s$  为固体域总长;  $v_0$  为界面移动速度;时间步长由流体域的时间步长决定,用  $\Delta t$  表示。

在外部边界的传热计算中,同样采用 Robin 边界条件:

$$q_{-J} = q_{\text{ext}} - \alpha_{\text{ext}} (T_{-J} - T_{\text{ext}}). \quad (5)$$

式中:  $q_{\text{ext}}$  为外部热流,  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $\alpha_{\text{ext}}$  为外部耦合系数,  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ;  $T_{-J}$  为点  $-J$  处的温度,  $\text{K}$ ;  $T_{\text{ext}}$  为外部温度,  $\text{K}$ ;  $q_{-J}$  为通过点  $-J$  的热流,  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。  $q_{-J}$  亦可以通过点  $-J$  和  $-J+1$  上的温度计算:

$$q_{-J} = -\kappa_s \frac{T_{-J+1} - T_{-J}}{\Delta x_s}. \quad (6)$$

因此,式(5)和式(6)是将外部边界条件引入到流固系统中进行迭代计算的必备关系式。

将 FVM 应用到流体中,靠近边界处的一点距离边界的长度为空间步长  $\Delta x_f$  的一半<sup>[10]</sup>,即点1的坐标为  $\Delta x_f/2$ ,其余点之间的距离为  $\Delta x_f$ 。

遵照通用的表示方式,用  $T_j^n$  代表  $j$  位置处  $n$  时刻的温度值,为求解  $T_j^{n+1}$ ,对式(1)和式(2)进行差分,界面处的温度用传统的顺序交错方式<sup>[11]</sup>进行迭代求解,迭代过程包括以下4个步骤:

$$\textcircled{1} T_{0+}^{n+1} = T_{0-}^n, j=0+;$$

$$\textcircled{2} \frac{\rho_f c_f}{\Delta t} (T_j^{n+1} - T_j^n) + \frac{\rho_f c_f v_0}{\Delta x_f} (T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) =$$

$$\frac{\kappa_f}{(\Delta x_f)^2} (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}), j \geq 1;$$

$$\textcircled{3} q_{0-}^{n+1} = q_{0+}^{n+1} - \alpha_{fu} (T_{0+}^{n+1} - T_{0-}^{n+1}), j=0-;$$

$$\text{其中, } q_{0-}^{n+1} = -\kappa_s \frac{T_{0-}^{n+1} - T_{-1}^{n+1}}{\Delta x_s},$$

$$q_{0+}^{n+1} = -2\kappa_f \frac{T_1^{n+1} - T_{0+}^{n+1}}{\Delta x_f};$$

$$\textcircled{4} T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1} = 0, j \leq -1.$$

不断执行以上 4 个步骤直至得到收敛的温度和热流。

## 2 稳定性分析

由于本文讨论的问题并非周期性变化而且边界条件不可忽略,因此, Von - Neumann 稳定性分析方法并不适用. 借鉴 Giles 的研究方法<sup>[12]</sup>, 本文采用 G - R 理论, 通过寻求系统的正则模态解来判断离散的流固系统(第 1 节末尾的循环迭代系统)的稳定性.

假设系统有形如公式(7)的正则模态解

$$T_j^n = \begin{cases} z^{-1} R_f^j, & j > 0; \\ z^n R_s^j, & j \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

式中  $z$  和  $R$  分别表示时间和空间放大因子.

G - R 理论的完整表述是若离散的系统在  $j \rightarrow \pm \infty$  时, 在  $|R_f| < 1$ ,  $|R_s| > 1$  和  $|z| > 1$  的条件下有形如式(7)的解, 则离散的系统不稳定. 将式(7)代入迭代求解步骤中去, 经过化简, 得到以下两个方程:

$$R_f(z) = 1 + \frac{1}{2AB} \left( Bv_0 + 1 - \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{2AB} \sqrt{\left( Bv_0 + 1 - \frac{1}{z} \right)^2 + 4AB \left( 1 - \frac{1}{z} \right)}, \quad (8)$$

$$z = g(z) = \frac{\frac{2\kappa_f}{\Delta x_f} (R_f(z) - 1) + \alpha_{fu}}{\alpha_{fu} + \frac{\beta\kappa_s}{\Lambda_s}}. \quad (9)$$

$$\text{式中, } A = \frac{\kappa_f}{\rho_f c_f \Delta x_f}, B = \frac{\Delta t}{\Delta x_f}, \beta = \frac{\alpha_{ext}}{\alpha_{ext} + \frac{\kappa_s}{\Lambda_s}}.$$

依据 G - R 理论, 在  $|z| \geq 1$  复平面内  $\max(|g(z)|) < 1$  是离散系统稳定的一个充要条件, 因此, 研究  $\max(|g(z)|)$  在  $|z| \geq 1$  内的变化情况是有必要的. 令  $Z = 1/z$ , 则将开放域  $|z| \geq 1$  转化成为有限闭区域  $|Z| \leq 1$ , 则式(9)变为

$$g(Z) = \frac{\frac{2\kappa_f}{\Delta x_f} (R_f(Z) - 1) + \alpha_{fu}}{\alpha_{fu} + \frac{\beta\kappa_s}{\Lambda_s}}. \quad (10)$$

由复变函数基本理论可知,  $g(Z)$  在  $|Z| < 1$

范围内全纯, 在边界  $|Z| = 1$  上连续, 则根据最大模原理可知  $g(Z)$  只可能在边界上取得最大值, 即  $\max(|g(z)|) = \max[|g(|z| = 1)|]$ . 此时,  $z$  的模  $r$  为 1, 辐角  $\theta$  由 0 到  $2\pi$  变化, 即  $z = e^{i\theta}$ , 代入式(8)和式(9)后可以得到

$$|g(|z| = 1)| = |g(e^{i\theta})| = \frac{\left| \alpha_{fu} - \frac{4\kappa_f}{\Delta x_f} f(\theta) \right|}{\alpha_{fu} + \frac{\beta\kappa_s}{\Lambda_s}}. \quad (11)$$

其中, 若令  $h(\theta) = 1 - \cos\theta + i\sin\theta$ , 可得到

$$f(\theta) = \frac{h(\theta)}{\sqrt{(Bv_0 + h(\theta))^2 + 4ABh(\theta)} + (Bv_0 + h(\theta))}.$$

由式(11)可知, 只有当  $|f(\theta)|$  取最小或最大值时,  $|g(|z| = 1)|$  才有可能取得最大值. 利用一阶导数为 0, 二阶导数不为 0 的方法容易发现,  $|f(\theta)|$  在  $\theta = 0$  或  $2\pi$  处取最小值, 在  $\theta = \pi$  处取最大值. 上述计算过程可在 Matlab 上实现. 因此,  $\max(|g(z)|)$  只可能发生在  $z = 1$  ( $\theta = 0$  或  $2\pi$ ) 或  $z = -1$  ( $\theta = \pi$ ) 上, 将  $z = \pm 1$  代入式(9), 可得

$$|g(z = 1)| = \frac{\alpha_{fu}}{\alpha_{fu} + \frac{\beta\kappa_s}{\Lambda_s}}, \quad (12)$$

$$|g(z = -1)| = \frac{\left| \frac{2\kappa_f}{\Delta x_f} (R_f(z = -1) - 1) + \alpha_{fu} \right|}{\alpha_{fu} + \frac{\beta\kappa_s}{\Lambda_s}}. \quad (13)$$

其中,

$$R_f(z = -1) = 1 + \frac{1}{2AB} [(Bv_0 + 2) - \sqrt{(Bv_0 + 2)^2 + 8AB}].$$

由于  $|g(z = 1)|$  和  $|g(z = -1)|$  的大小关系尚未确定, 因此, 若令  $|g(z = 1)| = |g(z = -1)|$ , 可得

$$|\alpha_{fu}| = \left| \alpha_{fu} - \frac{\kappa_f}{AB\Delta x_f} [\sqrt{(Bv_0 + 2)^2 + 8AB} - (Bv_0 + 2)] \right|. \quad (14)$$

根据式(14)可得到两条曲线相交时  $\alpha_{fu}$  的值, 并定义为  $\alpha_{fu}^{opt}$ , 具体表达式为

$$\alpha_{fu}^{opt} = \frac{\kappa_f}{2AB\Delta x_f} [\sqrt{(Bv_0 + 2)^2 + 8AB} - (Bv_0 + 2)]. \quad (15)$$

结合式(13)和式(15)发现,  $|g(z = -1)|$  随

$\alpha_{flu}$  变化而连续变化且在  $2\alpha_{flu}^{opt}$  处发生单调性质的突变. 当  $\alpha_{flu} < 2\alpha_{flu}^{opt}$  时,  $|g(z = -1)|$  单调递减; 当  $\alpha_{flu} > 2\alpha_{flu}^{opt}$  时,  $|g(z = -1)|$  单调递增.

由式(12)可知,  $|g(z = 1)|$  关于  $\alpha_{flu}$  是单调递增函数. 令  $|g(z = 1)| = |g(z = -1)|$ , 可得二者交点坐标为

$$(\alpha_{flu}, \max(|g(z)|)) = \left( \alpha_{flu}^{opt}, \frac{\alpha_{flu}^{opt}}{\alpha_{flu}^{opt} + \frac{\beta\kappa_s}{\Lambda_s}} \right). \quad (16)$$

根据函数的单调性质可知, 当  $\alpha_{flu} < \alpha_{flu}^{opt}$  时,  $|g(z = -1)| > |g(z = 1)|$ ,  $\max(|g(z)|) = |g(z = -1)|$ ; 当  $\alpha_{flu} > \alpha_{flu}^{opt}$  时,  $|g(z = -1)| < |g(z = 1)|$ ,  $\max(|g(z)|) = |g(z = 1)|$ ; 当  $\alpha_{flu} = \alpha_{flu}^{opt}$  时,  $|g(z = -1)| = |g(z = 1)|$ ,  $\max(|g(z)|) = |g(z = -1)| = |g(z = 1)|$ , 且  $\max(|g(z)|)$  取得最小值, 即

$$\{\max(|g(z)|)\}^{opt} = \frac{\alpha_{flu}^{opt}}{\alpha_{flu}^{opt} + \frac{\beta\kappa_s}{\Lambda_s}}. \quad (17)$$

用  $opt$  标注  $\alpha_{flu}$  及  $\max(|g(z)|)$  主要有以下原因:

① 由式(9)可知,  $\max(|g(z)|)$  的物理意义是最大时间放大因子, 而当  $\alpha_{flu}$  取  $\alpha_{flu}^{opt}$  时,  $\max(|g(z)|)$  取得最小值, 意味着由初始温度达到最终温度所需时间最少, 说明在这一点系统能获得最快的收敛速度;

② 由式(17)可知, 在  $\alpha_{flu}$  取  $\alpha_{flu}^{opt}$  时, 时间放大因子总是小于 1, 说明在这一点处离散系统是绝对稳定的.

由上述内容可知,  $\max(|g(z)|)$  准确的表达式为

$$\max(|g(z)|) = \begin{cases} |g(z = -1)|, & \alpha_{flu} < \alpha_{flu}^{opt}; \\ |g(z = 1)|, & \alpha_{flu} > \alpha_{flu}^{opt}; \\ |g(z = \pm 1)|, & \alpha_{flu} = \alpha_{flu}^{opt}. \end{cases} \quad (18)$$

由式(15)可知, 在材料参数已知且求解域完成离散化后,  $\alpha_{flu}^{opt}$  成为仅仅与交界面的移动速度有关的物理量且为单值对应, 这说明每一个速度值都有唯一的最优耦合系数与其对应, 以至于有唯一最优的最大时间放大因子与其对应. 不难想象, 在由  $v_0$ ,  $\alpha_{flu}$  和  $\max(|g(z)|)$  三者构成的三维空间中, 存在着一条由  $v_0^{opt}$ ,  $\alpha_{flu}^{opt}$  和  $\{\max(|g(z)|)\}^{opt}$  构成的最优曲线,  $v_0$  和  $\alpha_{flu}$  在这条最优曲线上取值, 必定能得到同等水平 ( $v_0$  或  $\alpha_{flu}$  固定时, 另一个参数变化的情况) 中最快的收敛速度和绝对稳

定的系统.

### 3 算例分析

第 2 节中的结论均由理论公式推导而得, 因此对于任意数据均成立. 任选物理参数 (如表 1 所示) 对以下两个结论进行实验, 采用不同的时间步并假设  $\beta = 1$ .

① 当  $v_0$  和  $\alpha_{flu}$  在这条最优曲线上取值时, 必定能得到同等水平中最快的收敛速度;

② 当  $v_0$  和  $\alpha_{flu}$  在这条最优曲线上取值时, 必定能得到绝对稳定的系统.

表 1 流体域和固体域物理参数  
Table 1 Parameters of fluid and solid domains

流体部分				
$\kappa_f$	$\Delta x_f$	$\rho_f$	$c_f$	$\kappa_f/\Delta x_f$
$W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$	m	$kg \cdot m^{-3}$	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	$W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$
0.02	$10^{-6}$	1	1 000	20 000
固体部分				
$\kappa_s$	$\Lambda_s$	$\kappa_s/\Lambda_s$		
$W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$	m	$W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$		
20	$10^{-2}$	2 000		

对于第一个结论, 根据式(15), 可以把  $\alpha_{flu}^{opt}$  视作速度  $v_0$  的函数 (或者反过来, 本文中采用公式(15)的表述), 式(18)对任意速度都是适用的. 因此任意选取速度值, 得出如图 2 所示的结果.

由图 2 可知, 无论速度和时间步怎样选取, 当  $\alpha_{flu}$  取  $\alpha_{flu}^{opt}$  时,  $\max(|g(z)|)$  取得最小值, 此时, 系统能达到最快的收敛速度, 由于数据选取的任意性, 此结论始终成立.

对于第二个结论. 综合式(15)和(17), 可得  $\max(|g(z)|)$  在这条最优曲线上关于  $v_0$  的表达式, 即

$$\{\max(|g(z)|)\}^{opt} = 1 - \frac{\frac{\beta\kappa_s/\Lambda_s}{4\kappa_f/\Delta x_f} + \frac{\beta\kappa_s}{\Lambda_s}}{\sqrt{(Bv_0 + 2)^2 + 8AB} + (Bv_0 + 2)}. \quad (19)$$

由式(19)可知, 无论  $v_0$  取何值,  $\{\max(|g(z)|)\}^{opt}$  恒小于 1, 依据 G - R 理论, 此时离散流固耦合系统绝对稳定, 此结论始终成立.



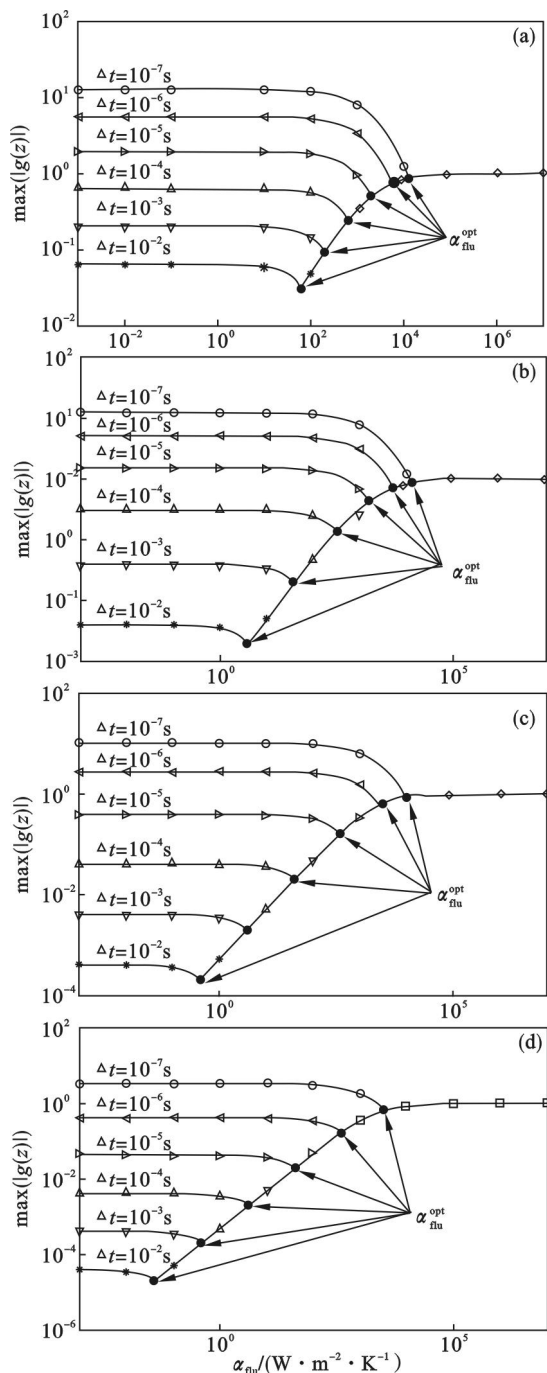


图 2 不同时间步和速度下  $\max(|g(z)|)$  随耦合系数的变化曲线

Fig. 2 Variation of  $\max(|g(z)|)$  with coupling coefficient under different time steps and velocity

(a) —  $v_0 = 0$ ; (b) —  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ ;  
(c) —  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ ; (d) —  $v_0 = 100 \text{ m/s}$ .

## 4 结 论

在 Dirichlet – Robin 组合边界条件下,考虑交界面移动的情况,对一维隐式流固耦合稳态传热系统进行数值求解,结果表明,存在一条由耦合系数和交界面移动速度组合而成的最优曲线,该曲线具有以下两个重要特征:①当速度和耦合系数

在这条曲线上取值时,离散的流固耦合系统能得到最快的收敛速度;②当速度和耦合系数在这条曲线上取值时,离散的流固耦合系统能绝对稳定。

本文的结论可以为设计人员解决工程问题时提供合理的参考,不仅可以节约仿真步数,还能避免因参数选取不合理而导致仿真失稳的问题。

## 参考文献:

- [1] 郭崇志,肖乐. 换热器流固传热边界数值模拟温度场的顺序耦合方法[J]. 化工进展, 2010, 29(9): 1615 – 1619. (Guo Chong-zhi, Xiao Le. A sequence coupling method for numerical simulation of temperature field in liquid-solid heat transfer boundary of a heat exchanger[J]. *Chemical Industry and Engineering Process*, 2010, 29(9): 1615 – 1619.)
- [2] 李朝祥,陆钟武,蔡九菊. 填充床内传热问题的数学统计分析法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 1998, 19(5): 484 – 487. (Li Chao-xiang, Lu Zhong-wu, Cai Jiu-ju. Mathematical statistics analysis for heat transfer in packed bed[J]. *Journal of Northeastern University(Natural Science)*, 1998, 19(5): 484 – 487.)
- [3] 陈良玉,李玉,王子金,等. 传热边界逆解在高炉炉缸侵蚀诊断中的应用[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2009, 30(8): 1135 – 1138. (Chen Liang-yu, Li Yu, Wang Zi-jin, et al. Application of inverse solution to boundary of heat transfer in erosion diagnosis of blast furnace hearth[J]. *Journal of Northeastern University(Natural Science)*, 2009, 30(8): 1135 – 1138.)
- [4] Roe B, Haselbacher A, Geubelle P H. Stability of fluid-structure thermal simulations on moving grids [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007, 54(9): 1097 – 1117.
- [5] Roe B, Jaiman R, Haselbacher A, et al. Combined interface boundary condition method for coupled thermal simulations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2008, 57(3): 329 – 354.
- [6] Henshaw W D, Chand K K. A composite grid solver for conjugate heat transfer in fluid-structure systems[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(10): 3708 – 3741.
- [7] Kazemi-Kamyab V, van Zuijlen A H, Bijl H. A high order time-accurate loosely-coupled solution algorithm for unsteady conjugate heat transfer problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 264: 205 – 217.
- [8] Kazemi-Kamyab V, van Zuijlen A H, Bijl H. Accuracy and stability analysis of a second-order time-accurate loosely coupled partitioned algorithm for transient conjugate heat transfer problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2014, 74(2): 113 – 133.
- [9] Roux F X, Garaud J D. Domain decomposition methods methodology with Robin interface matching conditions for solving strongly coupled fluid-structure problems [J]. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2009, 7(1): 29 – 38.
- [10] Errera M P, Chemin S. Optimal solutions of numerical interface conditions in fluid-structure thermal analysis[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 245: 431 – 455.
- [11] Felippa C A, Park K C. Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems; formulation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1980, 24(1): 61 – 111.
- [12] Giles M B. Stability analysis of numerical interface conditions in fluid-structure thermal analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1997, 25(4): 421 – 436.