

阈值 Landweber 在 MIT 图像重建中的应用

王旭¹, 王静文¹, 王柯元²

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 针对目前磁感应成像技术的图像重建质量较低、速度较慢的问题, 提出了一种阈值 Landweber 重建算法. 该算法在 Landweber 算法的基础上设置门限阈值, 并在每次迭代中都自适应地调节阈值参数, 从而提高了重建图像质量且加快 Landweber 方法的收敛速度. 在 Comsol Multiphysics 仿真软件建立 MIT 系统模型的基础上, 利用有限元方法求解了正问题. 模拟结果表明, 利用阈值 Landweber 图像重建算法获得的图像质量比 LBP、未添加阈值的 Landweber 图像重建算法要好, 同时也加快了收敛速度.

关 键 词: 磁感应成像; 图像重建; Landweber; 门限阈值; 有限元法

中图分类号: TP 301 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2016)04-0477-04

Application of Thresholding Landweber Algorithm in MIT Image Reconstruction

WANG Xu¹, WANG Jing-wen¹, WANG Ke-yuan²

(1. School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China. Corresponding author: WANG Jing-wen, E-mail: wangjingwenhappy@126.com)

Abstract: To improve image reconstruction quality of magnetic induction tomography (MIT), a thresholding Landweber reconstruction algorithm was put forward. The threshold value was set on the basis of the Landweber algorithm, and the threshold parameter was adaptively regulated with the iteration, which could improve the image reconstruction quality and accelerate the convergence rate of the Landweber algorithm. Based on the MIT system model established with Comsol Multiphysics, a forward mathematical model was set up and solved by the finite element method. The simulation results showed that the image reconstruction quality obtained by threshold Landweber reconstruction algorithm is better than that obtained by LBP and the algorithm without threshold, and the convergence rate can be accelerated.

Key words: magnetic induction tomography (MIT); image reconstruction; Landweber; thresholding; finite element method

磁感应成像技术 (magnetic induction tomography, MIT) 是一种具有非接触性、非侵入性、可检测磁性材料等优点的电学层析成像技术^[1-3], 又称作电磁层析成像 (electromagnetic tomography, EMT). 它通过给激励线圈加交变电流使之产生磁场, 该磁场穿过被测物体, 会在被测物体内部产生感应涡流, 该感应涡流又会产生感应磁场, 即二次磁场, 该二次磁场携带物体内部参数信息, 在检测线圈上会检测到该磁场信号, 并传给

计算机系统^[4]. MIT 非常适用于医疗应用, 尤其对还未发生病变, 但对存在潜在危险的癌症早期等疾病起到预防和治疗的作用. MIT 图像重建即逆问题是 MIT 技术的重要组成部分, 而 MIT 图像重建算法的好坏将直接影响到重建图像 (电导率或磁导率分布) 的质量. LBP 和 Landweber 是目前现有的 MIT 图像重建算法. LBP 算法优点是成像速度快, 无需迭代, 但是由于该算法理论基础不够完善, 导致重构出的图像失真较大.

收稿日期: 2014-11-07

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (N130404004).

作者简介: 王旭 (1956-), 男, 辽宁沈阳人, 东北大学教授, 博士生导师.

Landweber 方法是当前 MIT 图像重建中较普遍的一种迭代算法^[5], 由于其适应于大部分典型流型, 且编程简单, 比较容易实现. 但由于迭代序列使其收敛速度比较慢且精度低, 这就无法满足 MIT 系统在线实时观测的要求.

本文提出一种设置门限阈值的方法来加快其收敛速度, 并为了适应于 MIT 系统, 在每次迭代中都自适应地调节阈值参数, 从而提高图像重建的质量, 也加快了收敛速度.

1 MIT 数学模型

MIT 技术本质是对时谐涡流场中的边值问题求解^[6]:

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A = -J_s + j\omega\sigma A. \quad (1)$$

式中: A 为矢量磁位; σ 为电导率; μ 为磁导率; J_s 为线圈电流密度.

通过有限元方法求式(1)的边值问题相当于求解极值的变分问题:

$$\Phi(A) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{j\omega\sigma}{2} \int_{\Omega} (A)^2 dx dy - \int_{\Omega} J_s \cdot (A)^2 dx dy = \min. \quad (2)$$

经离散化, 变成求解节点矢量磁位值的矩阵方程^[7]:

$$KA + jTA = P. \quad (3)$$

式中: K 与 T 代表系数矩阵; P 代表 J_s 所确定的激励矩阵. 求解式(3), 可获得被测模型内的矢量磁位 A .

检测线圈上的感应电压为

$$V = j\omega \int A \cdot dl. \quad (4)$$

灵敏度 S 是检测线圈电压值的变化与电导率的变化之比:

$$S_k = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial \sigma_k} = -\omega^2 \frac{\int_{\Omega_{D_k}} A_i \cdot A_j dv}{I_0}. \quad (5)$$

式中: Ω_{D_k} 为被测物体的体积; I_0 为通入单位电流; A_i 和 A_j 为当分别对激励线圈 i 和接收线圈 j 施加电流 I_0 时通过正问题求解所得结果.

2 逆问题求解

MIT 正问题可表示成时谐涡流场问题, 即电

压 V 和电导率 σ 的关系:

$$V = \Psi(\sigma), \quad (6)$$

则相应的逆问题为

$$\sigma = \Psi^{-1}(V). \quad (7)$$

式(7)往往是欠定的且是非线性的. 图 1 展示了正逆问题的关系.

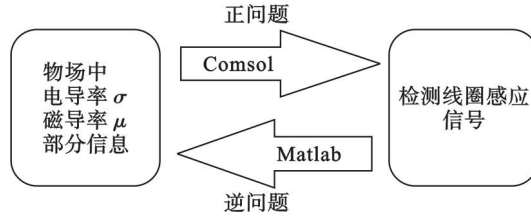


图 1 正逆问题的关系

Fig. 1 Relationship between forward and inverse problem

2.1 Landweber 图像重建算法

Landweber 的基本思想^[5]是最小化目标:

$$\min f(\sigma) = (V - S\sigma)^T (V - S\sigma). \quad (8)$$

式中: $S\sigma$ 是被线性化后的计算电压值; V 是测量电压值.

函数 $f(\sigma)$ 对应的梯度为

$$\nabla f(\sigma) = S^T S\sigma - S^T V = S^T (S\sigma - V). \quad (9)$$

根据梯度下降法, 如果函数 $f(\sigma)$ 在点 $\sigma = \sigma^k$ 处有定义并且可微, 那么函数 $f(\sigma)$ 在 $\sigma = \sigma^k$ 点沿着负梯度方向 $-\nabla f(\sigma)$ 下降最快. 基于此, 为了求解式(8), 可以提出以下迭代公式:

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k - \alpha \nabla f(\sigma^k) = \sigma^k + \alpha S^T (V - S\sigma^k). \quad (10)$$

式中 α 是一个正参数.

提高收敛速度的投影算子:

$$P(\sigma^j) = \begin{cases} 0, & \sigma^j < 0; \\ \sigma^j, & 0 < \sigma^j < 1; \\ 1, & \sigma^j > 1. \end{cases} \quad (11)$$

该方法被称作投影 Landweber 算法^[8].

2.2 阈值 Landweber 图像重建算法

由于 Landweber 算法的收敛性较差, 成像质量依赖于参数 α 的选择. 通过设置门限阈值可以加快收敛速度^[9]. 设定门限阈值, 将很容易求解式(10), 其形式为

$$\sigma^{k+1} = T_\tau(\sigma^{k+1}). \quad (12)$$

让 $d = (\sigma^{k+1})_i$, 有

$$T_\tau(d) = \begin{cases} d - \tau, & d \geq \tau; \\ 0, & |d| \leq \tau; \\ d + \tau, & d \leq -\tau. \end{cases} \quad (13)$$

参数 τ 的选择非常重要, 选择一个适应 MIT 系统的参数 τ 的思想是: 如果让设置门限阈值后的结果约等于 Landweber 多步迭代后的结果, 图像

重建会很快收敛,这就导致

$$\sigma^{k+j} \approx T_{\tau}(\sigma^{k+1}), j \geq 2. \tag{14}$$

根据 Landweber 迭代算法,能得到多步迭代:

$$\begin{aligned} \sigma^{k+j} &= \sigma^k + \alpha S^T(V - S\sigma^k) + \cdots + \alpha S^T(V - S\sigma^{k+j-1}) = \\ &= \sigma^k + \alpha [I + (I - \alpha S^T S) + \cdots + (I - \alpha S^T S)^{j-1}] S^T(V - S\sigma^k) = \sigma^k + AS^T(V - S\sigma^k). \end{aligned} \tag{15}$$

式中 A 和 I 都是 $n \times n$ 的矩阵,且 I 是单位矩阵.

根据式(12)和式(13)可知:

$$(\sigma^{k+j})_i = \begin{cases} d - \tau, & d - \tau \geq 0; \\ 0, & |d| \leq \tau; \\ d + \tau, & d + \tau \leq 0. \end{cases} \tag{16}$$

联合式(14)和式(15):

$$\left. \begin{aligned} ((A - \alpha I)S^T(V - S\sigma^k))_i &= -\tau \text{sign}(\sigma^{k+j})_i, \\ (\sigma^{k+j})_i &\neq 0; \\ |((A - \alpha I)S^T(V - S\sigma^k))_i| &\leq \tau, (\sigma^{k+j})_i = 0. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

对于整个向量 σ^k 有

$$\tau \geq \|(A - \alpha I)S^T(V - S\sigma^k)\|_2 / n^{0.5}. \tag{18}$$

根据不同的 A 或 j ,能得到不同种类的最小值 τ .通过实验可获得最优的 A 或 j .

具体实现步骤:

步骤 1 根据公式(15)计算矩阵 A ,根据公式(18)计算参数 τ .

步骤 2 以迭代的方式更新式(12)和(13).

步骤 3 在每次迭代后,根据式(11)更新估计投影.

步骤 4 迭代次数 k 在不断增加的同时,也不断重复步骤 2.当式(6)达到足够小时,终止迭代过程.

步骤 5 计算时间和误差.

3 仿真实验

为了验证阈值 Landweber 算法的性能,本文利用 Comsol Multiphysics 仿真软件建立 MIT 系统的测量模型.表 1 为 LBP, Landweber 和本文算法的重建图像.

由表 1 可知,本文算法(利用阈值 Landweber 算法)得出的图像边缘清晰,优于 LBP 和 Landweber 算法得出的图像重建效果.

由表 2 可知,在同一种模型下,相同的迭代次数,本文算法的重建图像时间明显小于 Landweber 迭代算法.由于 LBP 无需迭代自然时间很短.

表 1 原始图和不同算法的图像重建结果
Table 1 Original figure and image reconstruction with different algorithms


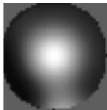
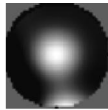
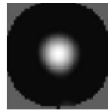


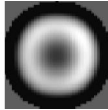
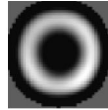

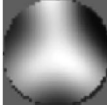

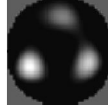
序号	原始图像	LBP	Landweber	本文算法
a				
b				
c				

表 2 不同算法的计算时间
Table 2 Computing time of different algorithms s

序 号	LBP	Landweber	本文算法
a	0.003 4	0.138 0	0.085 0
b	0.004 0	0.157 2	0.110 3
c	0.002 1	0.143 9	0.103 0

图像重建误差是指重建图像与原始图像之间的相对误差:

$$\text{error} = \frac{\|\hat{\sigma} - \sigma\|^2}{\|\sigma\|^2}. \tag{19}$$

式中: σ 为原始电导率向量; $\hat{\sigma}$ 为重建后电导率向量.

由表 3 可知,本文算法的图像误差比 LBP、未加阈值 Landweber 图像重建算法要好得多.由此证明了本文算法的重建图像的视觉效果清晰、误差小.

表 3 不同算法的相对误差
Table 3 Relative error of different algorithms %

序 号	LBP	Landweber	本文算法
a	158.90	68.45	49.40
b	130.62	90.47	56.52
c	98.39	84.31	68.38

4 结 论

本文在分析 MIT 系统基本理论的基础上,提出了一种阈值 Landweber 图像重建算法.通过仿真实验证明本文算法的图像效果和误差均比 LBP, Landweber 图像重建算法要好得多,且收敛速度快.由此可见,本文算法用于 MIT 图像重建有效且精度较高,值得进一步研究和推广.

参考文献:

- [1] Griffith H. Magnetic induction tomography [J]. *Measurement Science and Technology*, 2001, 12(8): 1126 – 1131.
- [2] Wang J W, Wang X. Application of particle filtering algorithm in image reconstruction of EMT[J]. *Measurement Science and Technology*, 2015, 26(7): 5303 – 5310.
- [3] Merwa R, Hollaus K, Oszk B, et al. Detection of brain oedema using MIT: a feasibility study of the likely sensitivity and detectability [J]. *Physiological Measurement*, 2004, 25(3): 347 – 354.
- [4] Ma X, Peyton A J, Higson S R, et al. Hardware and software design for an electromagnetic induction tomography (EMT) system for high contrast metal process applications [J]. *Measurement Science and Technology*, 2006, 17(6): 111 – 118.
- [5] Zhang M, Ma L, Soleimani M. Magnetic induction tomography guided electrical capacitance tomography imaging with grounded conductors[J]. *Measurement*, 2014, 53(7): 171 – 181.
- [6] Hollaus K, Magele C, Merwa R, et al. Numerical simulation of the eddy current problem in magnetic induction tomography for biomedical applications by edge elements [J]. *IEEE Transaction on Magnetics*, 2004, 40(3): 623 – 626.
- [7] Soleimani M, Lionheart W R B, Peyton A J, et al. A three-dimensional inverse finite-element method applied to experimental eddy-current imaging data [J]. *IEEE Transaction on Magnetics*, 2006, 42(10): 1560 – 1567.
- [8] Bertero M, Piana P. Projected Landweber method and preconditioning [J]. *Inverse Problems*, 1997, 13(4): 441 – 464.
- [9] Daubechies I, Defrise M, Mol C D. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(11): 1413 – 1457.

(上接第 476 页)

- [10] 董明, 张勇, 张岩, 等. 含电气量信息的电力系统故障诊断解析模型[J]. 电力系统自动化, 2013, 37(6): 55 – 62.
(Dong Ming, Zhang Yong, Zhang Yan, et al. An analytic model for power system fault diagnosis employing electrical data[J]. *Automation of Electric Power System*, 2013, 37(6): 55 – 62.)
- [11] 董明. 具有高容错能力的电力系统故障诊断的解析模型与方法[D]. 杭州: 浙江大学, 2012.
(Dong Ming. Analytic model and methods for power system fault diagnosis with high fault-tolerance capability [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2012.)
- [12] Montgomery G J, Drake K C. Abductive reasoning networks [J]. *Neurocomputing*, 1991, 2(3): 97 – 104.
- [13] Huang Y C. Abductive reasoning network based diagnosis system for fault section estimation in power systems [J]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2002, 17(2): 369 – 374.
- [14] Farlow S J. Self-organizing methods in modeling [M]. New York: Marcel Dekker, 1984.