

基于响应面和 MCMC 的齿轮接触疲劳可靠性

佟 操, 孙志礼, 柴小冬, 王 健

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 针对齿轮接触失效, 建立带有安装与制造误差的齿轮参数化模型, 通过大变形显式动力学仿真软件来模拟齿面动态接触应力. 然后, 根据应力-强度干涉模型, 建立齿轮响应面状态函数. 为了提高齿轮响应面功能函数的拟合精度, 提出了一种基于响应面和 Markov chain Monte Carlo (MCMC) 的可靠性分析方法, 并进行可靠性灵敏度分析, 以定量概率反映安装误差、制造误差及外载荷等随机因素对齿轮传动可靠性的影响程度. 最后, 将 Monte Carlo 模拟 100 000 次的计算结果与所提方法的结果进行比较, 验证了可靠性分析方法的正确性.

关 键 词: 响应面; 马氏链蒙特卡洛 (MCMC); 齿面接触疲劳; 安装误差; 制造误差; 可靠性灵敏度

中图分类号: TH 113 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2016)04-0532-06

Gear Contact Fatigue Reliability Based on Response Surface and MCMC

TONG Cao, SUN Zhi-li, CHAI Xiao-dong, WANG Jian

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: TONG Cao, E-mail: tongcao19@163.com)

Abstract: A parameterized model of the gear with assembly and manufacturing errors was established for the gear contact failure, and the dynamic tooth surface contact stress was simulated by using the large-deformation explicit dynamics simulation software. Then, the response performance function of the gear was built by the stress-strength interference model. A reliability analysis method based on response surface and the Markov chain Monte Carlo (MCMC) was proposed to improve the precision of the response performance function, and the dependability sensitivity analysis was conducted to quantify the effects of assembly errors, machining errors and stochastic external loads on gear transmission reliability. Finally, the correctness of this method was verified by comparing the results of 100 000 Monte Carlo simulations with the results of the as-proposed method.

Key words: respond surface; Markov chain Monte Carlo (MCMC); gear tooth contact fatigue; assembly error; machining errors; reliability sensitivity

齿轮是最常用的动力传输和运动传递装置, 由于受加工、装配及外界环境等影响, 其安装误差、制造误差、外部载荷等因素均具有随机性^[1], 导致齿轮振动、噪声和点蚀破坏等故障. 这些随机因素严重影响齿轮啮合传动的可靠性, 然而, 常规的齿轮可靠性设计通常将这些随机因素作为固定常量或将其适当简化^[2-6], 这样很难准确地进行齿轮可靠性分析.

在齿轮可靠性分析时, 由于人力、物力和财力等因素的限制, 很难开展真实的可靠性试验来获取大量数据, 因此, 通过虚拟仿真代替真实响应并与抽样方法相结合来进行可靠性分析已成为可靠性分析方法常用的工具之一. 然而即使采用虚拟仿真代替真实响应, 由于抽样次数多, 也很难在短时间进行大样本的可靠度计算. 基于此, 为了解决齿轮接触疲劳可靠性评估计算量大和计算精度

收稿日期: 2015-01-30

基金项目: 国家科技重大专项(2013ZX04011-011).

作者简介: 佟 操 (1986-), 男, 辽宁营口人, 东北大学博士研究生; 孙志礼 (1957-), 男, 山东巨野人, 东北大学教授, 博士生导师.

低的问题,采用响应面代替真实响应是近几年常采用的方法。

随着现代机械工业技术的发展,要求齿轮传动具有轻型化、高可靠性、高精度等特性,基于此,开展齿轮传动可靠性分析方法的研究,以定量的概率反映安装误差、制造误差及外载荷等随机因素对齿轮传动可靠性的影响程度,对齿轮传动系统的优化设计具有重要意义。

1 可靠性分析方法

1.1 基于响应面的可靠性分析方法

为了解决隐式函数关系,常采用响应面法进行可靠性分析。基本思想是采用一系列确定性试验,通过回归分析得到响应面函数,在后续的可靠性分析时采用响应面函数代替系统响应状态函数。根据文献[7],响应面函数的表达式为

$$\hat{y} = c_0 + \sum_{i=1}^{N_R} c_i x_i + \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=i}^{N_R} c_{ij} x_i x_j. \quad (1)$$

式中: c_0, c_i, c_{ij} ($i=1, 2, \dots, N_R; j=i, \dots, N_R$) 是待定系数,共 $n+1+n(n+1)/2$ 个。

根据问题的需要采用一种试验设计(DOE),确定样本点。当随机变量为任意分布时,采用式(2)计算水平点值 x_n :

$$\int_{-\infty}^{x_n} f(x) dx = p_n, n = 1, 2, 3. \quad (2)$$

式中: p_n 表示水平,根据概率论与数理统计中的 3σ 法则,即正态分布随机变量 x 的值落在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 范围内是必然发生的,取 $p_1 = 0.0013, p_2 = 0.5, p_3 = 0.9987$,分别对应于 $\Phi^{-1}(p_1) = -3, \Phi^{-1}(p_2) = 0, \Phi^{-1}(p_3) = 3; f(x)$ 是随机变量 x 的概率密度函数; x_n 表示水平点值,如 x_1 为随机变量取到的最小值, x_2 为随机变量取到的中值, x_3 为随机变量取到的最大值。

当随机变量为正态分布且已知 μ 和 σ 分别为均值和标准差时,水平点 x_n 按式(3)确定:

$$x_n = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p_n). \quad (3)$$

式中: $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数; $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态分布逆函数。

当随机变量为正态分布且已知随机变量的水平点值 x_n 时,变量 μ 和 σ 可通过 3σ 法则将 $\Phi^{-1}(p_1) = -3, \Phi^{-1}(p_2) = 0, \Phi^{-1}(p_3) = 3$ 代入式(2)与式(3)得到

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = \mu + 3\sigma, \\ \mu = \mu - 3\sigma; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = (x_3 + x_1)/2, \\ \sigma = (x_3 - x_1)/6. \end{cases} \quad (4)$$

对 N_s 个样本点参数进行仿真计算,得到输出点 $(y_1, y_2, \dots, y_{N_s})$,采用最小二乘法进行回归分析:

$$S = \sum_{i=1}^{N_R} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{N_R} [y_i - (c_0 + \sum_{i=1}^{N_R} c_i x_i + \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=i}^{N_R} c_{ij} x_i x_j)]^2. \quad (5)$$

式中: ε_i 为误差变量。根据最小二乘原理,令误差项最小,有 $\partial S / \partial c_0 = 0, \partial S / \partial c_i = 0, \partial S / \partial c_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, N_R, j = i, \dots, N_R$ 。

通过求解上述方程组,得到响应面函数式(1)中的系数。之后便可以采用响应面函数替代真实响应以进行可靠性分析。

1.2 MCMC 方法

马氏链蒙特卡洛(Markov chain Monte Carlo)方法(MCMC法),是一种特殊的蒙特卡洛法。此方法是以平稳分布的马氏链上产生相互依赖的样本,能够模拟出所要求密度函数的样本点。其基本理论框架和更多的基本理论详见文献[8-9]。

在计算失效概率时,通常关心落入失效域的抽样点,因此,本文可靠性算法中,主要是采用MCMC法来模拟失效域的样本点,从这些样本点中筛选出离验算点最近的最佳点,将其加入到试验设计中,建立响应面函数,提高响应面状态函数在失效区域验算点附近的拟合精度,从而提高可靠度的计算精度。设服从在失效域内的条件概率密度函数为 $q(\mathbf{x}|F)$,则产生失效域 F 内样本点 $\mathbf{x}^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) 的具体步骤如下。

1) 定义马尔科夫链的极限(平稳)分布:马尔科夫链的极限分布为失效域 F 的条件概率密度分布:

$$q(\mathbf{x}|F) = I_F(\mathbf{x}) f_x(\mathbf{x}) / P(F). \quad (6)$$

2) 选择建议分布 $f^*(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{x})$: 分布 $f^*(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{x})$ 是控制马尔科夫链从一个状态向另一个状态的转移,选择具有对称性的均匀分布,即

$$f^*(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{x}) = \begin{cases} \prod_{k=1}^n l_k, & |\varepsilon_k - x_k| \leq \frac{l_k}{2}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (7)$$

式中: $k=1, 2, \dots, n; \varepsilon_k, x_k$ 分别为 n 维向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 \mathbf{x} 的第 k 个分量; l_k 是以 \mathbf{x} 为中心的 n 维超多面体

x_k 方向上的边长. 按经验, 一般取 $l_k = 6\sigma_k N_i^{-\frac{1}{(n+4)}}$.

3) 确定马尔科夫初始链状态 $\mathbf{x}^{(0)}$: 可依据工程经验或数值模拟方法确定失效域内的一点为 $\mathbf{x}^{(0)}$.

4) 产生马尔科夫链的第 j 个状态 $\mathbf{x}^{(j)}$: 根据建议分布和 Metropolis – Hastings 准则, 由前一个状态 $\mathbf{x}^{(j-1)}$ 来确定马尔科夫链的第 j 个状态 $\mathbf{x}^{(j)}$, 即^[8]

$$\mathbf{x}^{(j)} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}, & \min\{1, r\} > \text{random}[0, 1]; \\ \mathbf{x}^{(j-1)}, & \min\{1, r\} \leq \text{random}[0, 1]. \end{cases} \quad (8)$$

式中, r 为备选状态 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的条件概率密度函数 $q(\mathbf{x}|F)$ 与马尔科夫链前一状态的条件概率密度函数 $q(\mathbf{x}^{(j-1)}|F)$ 的比值, 即 $r = \frac{q(\mathbf{x}|F)}{q(\mathbf{x}^{(j-1)}|F)}$; $\text{random}[0, 1]$ 为 $[0, 1]$ 区间均匀分布的随机数.

5) 产生 N_M 个条件样本点: 重复步骤 4), 当马尔科夫链状态的遍历均值达到稳定后, 选取 N_M 个马尔科夫链的状态作为失效域的样本点. 图 1 为 2 个不同初始点的 4 000 步迭代的水平转角误差 θ 遍历均值图. 可以看出, 到 1 700 步时, 迭代得到的马尔科夫链已经基本收敛, 只要从收敛后的状态选取 N_M 个样本点即可满足上述要求.

在经典响应面法的基础上, 从这些样本点中筛选出离验算点最近的最佳点, 即 $\max(f(\mathbf{x}_i^F))$ ($i = 1, 2, \dots, N_{MC}$) 对应的样本点, 将其加入到初始试验设计中, 并进行一次动力学仿真, 基于更新后的试验设计来建立响应面函数, 通过循环迭代提高响应面状态函数在失效区域验算点附近的拟合精度, 从而提高可靠度的计算精度.

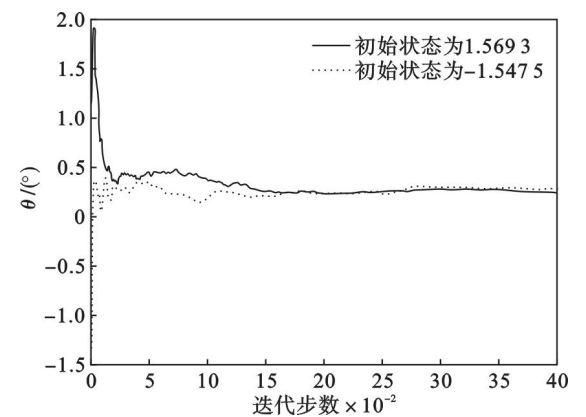


图 1 4 000 步迭代的 θ 遍历均值
Fig. 1 Traversal average value of θ in 4 000 iterations

2 齿轮误差参数化建模与动力学仿真

因结构尺寸的变动需要对齿轮模型进行重新

建立, 费时费力, 而齿轮的可靠性分析需要改变参数并重新建模与分析. 为了方便快捷地进行齿轮可靠度计算和可靠性灵敏度分析, 这就要求给定任意齿轮参数, 都能够进行动力学仿真并得到应力响应.

2.1 随机变量的考虑

研究显示^[1], 安装误差、制造误差、负载力矩和转速等随机因素对齿轮接触应力有着重要影响, 而接触应力是引起齿轮失效的直接原因, 故而也是齿轮接触疲劳可靠性分析的主要因素.

根据文献[10 – 11], 定义安装与制造误差为水平偏移误差 X_e 、水平转角误差 θ 、垂直偏移误差 Z_e 、垂直转角误差 ϕ 的合成误差.

齿面的制造误差可将其等效定义为两种偏移的合成, 第一种是虚线齿廓①(即理想无误差齿廓)至点划线齿廓②(过渡齿廓)的位置偏移; 另一种是由点划线齿廓②至实线齿廓③的形状偏移.

最终主要考虑的随机变量为 $X_e, Z_e, \theta, \phi, \Delta_{\text{基节}}$, 小齿轮力矩 T , 大齿轮转速 n . 其中, 齿轮的安装误差 X_e, Z_e, θ, ϕ 是根据典型减速器产品中某一齿轮的精度等级和设计指标, 通过查取机械设计手册和参考文献[10], 根据 3σ 法则, 由式(4)计算得到这些随机变量的均值和标准差数据^[7]. 齿轮的基节误差 $\Delta_{\text{基节}}$ 是通过查取机械设计手册得到其均值的最大和最小值, 由式(4)可计算得到均值和标准差数据. 小齿轮力矩 T 和大齿轮转速 n 见文献[7], 在试验数据缺乏时取变异系数为 0.1. 各变量的随机特性如表 1 所示^[6, 10].

表 1 各变量的平均值和标准差			
Table 1 Mean and standard deviation of different variables			
变量	分布类型	平均值	标准差
$X_e/\mu\text{m}$	正态	-10	3.3
$Z_e/\mu\text{m}$	正态	-10	3.3
$\theta/(^\circ)$	正态	0	0.02
$\phi/(^\circ)$	正态	0	0.02
$\Delta_{\text{基节}}/\mu\text{m}$	正态	0	8
$T/(\text{N}\cdot\text{m})$	正态	161.4	16.14
$n/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	正态	650	65

2.2 安装与制造误差模型的建立

对于安装误差, 按照 2.1 节所述安装误差的定义, 建立基准线, 然后在装配齿轮过程中, 令齿轮与误差基准线对齐即可.

对于制造误差, 根据 2.1 节的等效定义和文献[11]的方法, 把基节偏差值转化为阵列角度偏

差, 就可以将 $\Delta_{\text{基节}}$ 转化为阵列角度偏差:

$$\theta_{\text{偏差}} = \frac{2\Delta_{\text{基节}}}{d_{\text{基圆}}} \times \frac{360}{2\pi} = \frac{360\Delta_{\text{基节}}}{d_{\text{基圆}}\pi}. \quad (9)$$

在阵列齿轮, 实际阵列角度为

$$\theta_{\text{实际转角}} = \theta + \theta_{\text{偏差}} = \frac{360}{Z} + \frac{360\Delta_{\text{基节}}}{d_{\text{基圆}}\pi}. \quad (10)$$

采用三维建模软件建立含误差的齿轮模型, 将式(10)带有偏差齿轮的实际阵列角度设置在 Pro/E 关系式中, 生成带有安装与制造误差的齿轮模型.

2.3 动力学仿真

按照 2.1 节和 2.2 节的方法建立含有安装与制造误差的齿轮副实体参数化模型, 采用大变形非线性显式动力学软件进行仿真^[11], 模拟含有误差齿轮在啮合过程中的动态接触应力. 齿轮副有限元模型见图 2. 图 3 为大齿轮各随机参数取均值时某一时刻的 Von Mises 应力云图.

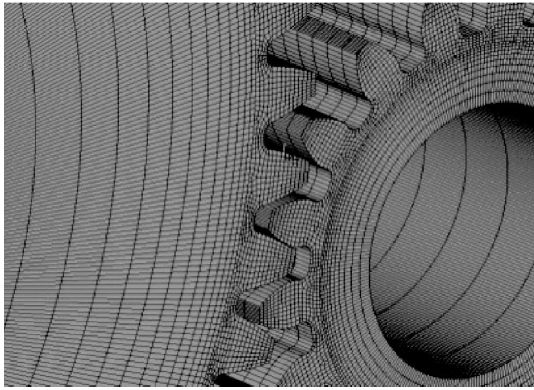


图2 齿轮有限元模型

Fig. 2 Finite element model of gear

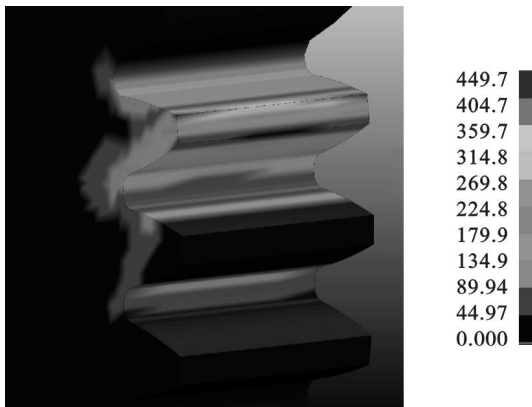


图3 大齿轮各变量参数取均值时的 Von Mises 应力云图

Fig. 3 Von Mises stress cloud when variable parameters of gear take the mean

3 齿轮接触疲劳可靠性分析

3.1 齿面接触可靠度的计算

1) 建立齿面接触疲劳功能函数的基本流程:

假设齿面最大接触应力的响应函数为

$$\sigma(\mathbf{x}) = c_0 + \sum_{i=1}^{N_R} c_i x_i + \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=i}^{N_R} c_{ij} x_i x_j. \quad (11)$$

根据应力-强度模型可知, 齿面接触应力大于接触强度, 齿面发生点蚀, 处于失效状态, 故齿面接触疲劳问题的功能函数为

$$g(\mathbf{x}) = \sigma_{\text{HS}} - \sigma(\mathbf{x}) =$$

$$\sigma_{\text{HS}} - (c_0 + \sum_{i=1}^{N_R} c_i x_i + \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=i}^{N_R} c_{ij} x_i x_j). \quad (12)$$

式中: σ_{HS} 为无限寿命下的齿面接触疲劳强度极限, 根据文献[6]知, 其均值为 935.56 MPa, 变异系数取 0.1; 当 $g(\mathbf{x}) \leq 0$ 时, 处于失效状态, 当 $g(\mathbf{x}) > 0$ 时, 则处于安全状态.

为提高齿面接触疲劳功能函数的拟合精度并进行可靠性分析, 本文在响应面法的基础之上, 结合 MCMC 法模拟, 提出一种建立响应面功能函数的混合算法.

具体步骤如下:

步骤 1 令 $x_1 = X_e, x_2 = Z_e, x_3 = \theta, x_4 = \phi, x_5 = \Delta_{\text{基节}}, x_6 = T, x_7 = n$, 选择 Box-Behnken^[12] 作为初始试验设计, 设初始样本点为 $S_0 = [\mathbf{x}^{(1)} \mathbf{x}^{(2)} \cdots \mathbf{x}^{(N_S)}]^T$, 根据 2.2 节误差齿轮的建模方式建立实体模型, 导入到动力学仿真软件中并计算齿轮在啮合过程中齿面最大的接触应力响应, 得到齿轮的响应面功能函数值 $\mathbf{Y}_0 = [y_1 y_2 \cdots y_{N_S}]^T$.

步骤 2 由 S_0 和 \mathbf{Y}_0 , 通过最小二乘回归分析法, 建立齿面接触疲劳的功能函数, 并且令迭代次数 N_{iter} 为 1.

步骤 3 根据第 1.2 节 MCMC 法模拟当前功能函数失效域内的 N_{MC} 个样本点, 在本文中 N_{MC} 取 1 000, 设失效域内的样本点为 $\mathbf{x}_F^{(i)} (i = 1, 2, \dots, N_{\text{MC}})$.

步骤 4 从这些失效域内的 N_{MC} 个样本点中筛选出 $\max(f(\mathbf{x}_F^{(i)})) (i = 1, 2, \dots, N_{\text{MC}})$ 对应的样本点, 设该样本点为 \mathbf{x}_{best} .

步骤 5 根据当前的响应面状态函数, 采用一次二阶矩法^[13] 计算设计验算点 $\mathbf{x}_{N_{\text{iter}}}^*$.

步骤 6 计算 $\mathbf{x}_{N_{\text{iter}}}^*$ 与 $\mathbf{x}_{N_{\text{iter}}-1}^*$ 之间的相对误差是否满足规定的精度误差 ε 要求, 如果 $\mathbf{x}_{N_{\text{iter}}}^*$ 与

$\mathbf{x}_{N_{\text{iter}}-1}^*$ 的相对精度误差 $\frac{|\mathbf{x}_{N_{\text{iter}}}^* - \mathbf{x}_{N_{\text{iter}}-1}^*|}{\mathbf{x}_{N_{\text{iter}}-1}^*}$ 小于阈值

ε , 则停止迭代, 说明此时齿面接触疲劳响应面功能函数已达到足够精度; 如不满足, 令 $N_{\text{iter}} = N_{\text{iter}} + 1$, 将 \mathbf{x}_{best} 加入到 S_0 中来更新试验设计, 重新建立响应面功能函数, 重复步骤 3 ~ 步骤 6, 直至达到精

度要求为止.

2) 齿面接触疲劳可靠度的计算. 按照算法流程编制程序, 经过 52 次循环连续迭代后达到收敛条件, 得到满足足够精度的齿面接触疲劳的功能函数, 设计验算点 \mathbf{x}^* 为 $[-8.456\ 9, -11.252, -0.000\ 622\ 34, -0.004\ 234\ 5, 2.134\ 3, 120.7, 634.43]$, 可靠度指标 β 为 2.811 0, 其相对误差小于 0.000 1, 可靠度 $\Phi(\beta) = 0.997\ 53$.

表 2 为 100 000 次 Monte Carlo 模拟法、FORM、响应面 + FORM 法及本文算法的计算结果. 其中, 100 000 次 Monte Carlo 模拟法作为‘精确解’与其他方法比较.

表 2 不同方法的计算结果
Table 2 Results of different methods

方法	调用有限元仿真次数	可靠度	相对误差/%
Monte Carlo	100 000	0.994 10	—
FORM	200(5 × 40) 未收敛	0.938 60	5.583
响应面 + FORM	100	0.968 29	2.596
本文算法	152(100 + 52)	0.997 53	0.345

由表 2 可知, FORM 采用梯度来迭代寻找设计验算点的方式很难收敛, 故而计算结果精度较差. 响应面法 + FORM 法的计算精度有所提高, 解决了隐式函数的问题. 本文算法在此方法的基础上, 引入了 MCMC 抽样选点, 使得响应面在设计验算点附近更加精确, 其计算精度明显高于在未采用 MCMC 法前的响应面 + FORM 的计算结果, 从而说明了本文算法的高效性和精确性.

3.2 可靠性灵敏度分析

各随机参数相互独立, 假设均值向量和方差向量为 $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7]$ 和 $\mathbf{D} = [D_1, D_2, \dots, D_7]$, 按文献[7]可得

$$E(x_i^2) = E^2(x_i) + D(x_i) = \mu_i^2 + D_i, \quad (13)$$

$$E(x_i x_j) = E(x_i) E(x_j) = \mu_i \mu_j, \quad (14)$$

$$D(x_i^2) = 4\mu_i^2 D_i + 2D_i, \quad (15)$$

$$D(x_i x_j) = \mu_i^2 D_j + \mu_j^2 D_i + D_i D_j. \quad (16)$$

式中, μ_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) 为 $\boldsymbol{\mu}$ 的第 i 个分量, D_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) 为 \mathbf{D} 的第 i 个分量.

由式(12) ~ 式(16)可得

$$E[g(\mathbf{x})] = \mu_g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7, D_1, D_2, \dots, D_7), \quad (17)$$

$$D[g(\mathbf{x})] = D_g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7, D_1, D_2, \dots, D_7). \quad (18)$$

可靠度指标定义为

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sqrt{D_g}}. \quad (19)$$

如果响应面状态函数 $g(\mathbf{x})$ 服从正态分布, 则可靠度为

$$R = \Phi(\beta). \quad (20)$$

因此, 可靠度 R 对基本随机参数矢量的均值矩阵 $\boldsymbol{\mu}$ 和方差 \mathbf{D} 的灵敏度为

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} = \frac{\partial R}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} + \frac{\partial \beta}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} \right), \quad (21)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{D}^T} = \frac{\partial R}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial \mathbf{D}^T} + \frac{\partial \beta}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \mathbf{D}^T} \right). \quad (22)$$

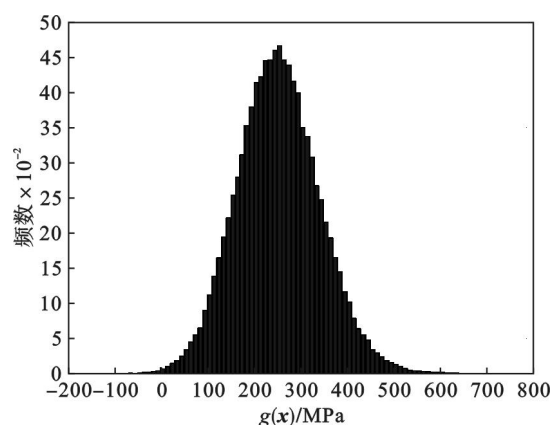
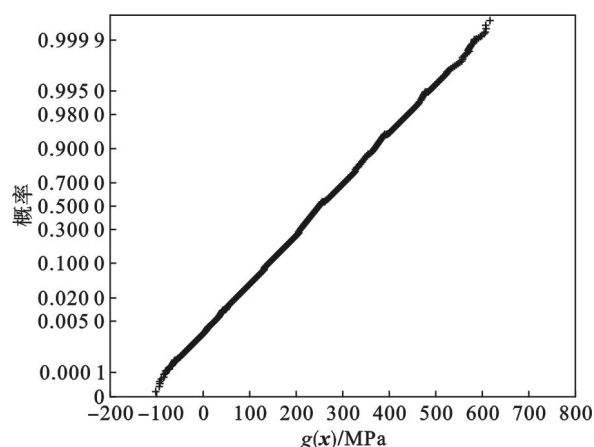
式中: $\frac{\partial R}{\partial \beta} = \phi(\beta)$; $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} = \frac{1}{\sqrt{D_g}}$; $\frac{\partial \beta}{\partial D_g} = -\frac{\mu_g}{2} D_g^{-\frac{3}{2}}$;

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} = \left[\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_1}, \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_7} \right]^T; \frac{\partial \mu_g}{\partial \mathbf{D}^T} = \left[\frac{\partial \mu_g}{\partial D_1}, \frac{\partial \mu_g}{\partial D_2}, \dots, \frac{\partial \mu_g}{\partial D_7} \right]^T; \frac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} = \left[\frac{\partial D_g}{\partial \mu_1}, \frac{\partial D_g}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial D_g}{\partial \mu_7} \right]^T; \frac{\partial D_g}{\partial \mathbf{D}^T} = \left[\frac{\partial D_g}{\partial D_1}, \frac{\partial D_g}{\partial D_2}, \dots, \frac{\partial D_g}{\partial D_7} \right]^T.$$

对齿面接触疲劳的功能函数式进行 100 000 次 Monte Carlo 模拟, 可以得到状态函数 $g(\mathbf{x})$ 的频率直方图和正态概率分布图, 分别如图 4 和图 5 所示. 由图 5 可知, 二者呈直线分布, 故认为 $g(\mathbf{x})$ 服从正态分布. Monte Carlo 模拟得到均值与标准差为 $\mu_g = 253.303$, $\sigma_g = 88.985$. 由式(13) ~ 式(18)知, $\mu_g = 254.556$, $\sigma_g = 89.132$. 上述所得结果与 Monte Carlo 方法所得数据接近. 由式(21), 式(22), 略去偏导求解过程, 得到所有随机变量的可靠性灵敏度为

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} &= \left(\frac{\partial R}{\partial \mu_1}, \frac{\partial R}{\partial \mu_2}, \frac{\partial R}{\partial \mu_3}, \frac{\partial R}{\partial \mu_4}, \frac{\partial R}{\partial \mu_5}, \frac{\partial R}{\partial \mu_6}, \frac{\partial R}{\partial \mu_7} \right)^T = \\ &(-0.019\ 53, -0.023\ 76, -0.437\ 6, \\ &0.017\ 6, -0.522\ 3, -1.394, 0.175\ 1) \times 10^{-5}, \\ \frac{\partial R}{\partial \mathbf{D}^T} &= \left(\frac{\partial R}{\partial D_1}, \frac{\partial R}{\partial D_2}, \frac{\partial R}{\partial D_3}, \frac{\partial R}{\partial D_4}, \frac{\partial R}{\partial D_5}, \frac{\partial R}{\partial D_6}, \frac{\partial R}{\partial D_7} \right)^T = \\ &(-0.0321, -0.049, -0.1708, -0.0239, \\ &-0.1496, -0.4575, -0.0841) \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

由 $\partial R / \partial \boldsymbol{\mu}^T$ 所得可靠性灵敏度的结果知, 齿面接触疲劳可靠度对转矩 T 均值灵敏度较强, 随着 T 均值增加而减小, 对基节偏差 $\Delta_{\text{基节}}$ 和啮合面转角偏差 θ 均值灵敏度次之, 其他所有随机因素均值的影响较小; 由 $\partial R / \partial \mathbf{D}^T$ 所得可靠性灵敏度的结果知, $T, \Delta_{\text{基节}}$ 和 θ 的增加都会降低齿面接触疲劳可靠度. 因此, 在设计齿轮时需对上述可靠性灵敏度较高的随机因素进行严格控制.

图4 $g(x)$ 频率直方图Fig. 4 Frequency chart of $g(x)$ 图5 $g(x)$ 正态概率纸分布图Fig. 5 Normal probability distribution of $g(x)$

4 结 论

1) 本文建立了带有安装与制造误差的齿轮参数化模型, 不受误差参数变化的限制, 能够实现不同误差齿轮模型的建立, 从而为后续的齿面接触疲劳可靠性分析提供了强大的建模基础。

2) 由于引入了 MCMC 抽样选点, 使得响应面在设计验算点附近更加精确, 其计算精度明显高于在未采用 MCMC 法前的响应面 + FORM 的计算结果, 验证了本文算法的高效性, 提高了可靠度和可靠性灵敏度的计算精度。

3) 通过 100 000 次 Monte Carlo 模拟的结果对比可知, 本文算法与 Monte Carlo 较为相近, 验证了本文算法的正确性。

参考文献:

[1] Ristivojevic M, Lazovic T, Vencel A. Studying the load carrying capacity of spur gear tooth flanks [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 59(1): 125–137.

[2] Yang Q J. Fatigue test and reliability design of gears [J]. *International Journal of Fatigue*, 1996, 18(3): 171–177.

[3] Peng X Q, Liu G, Wu L Y, et al. A stochastic finite element method for fatigue reliability analysis of gear teeth subjected to bending [J]. *Computational Mechanics*, 1998, 21(3): 253–261.

[4] Zhang Y M, Liu Q L, Wen B C, et al. Practical reliability-based design of gear pairs [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2003, 38(12): 1363–1370.

[5] 李永东, 张男, 张丙喜, 等. 某型坦克齿轮接触疲劳强度可靠性的 Monte Carlo 数值模拟 [J]. *机械强度*, 2006, 28(1): 46–50.

(Li Yong-dong, Zhang Nan, Zhang Bing-xi, et al. Numerical simulation for contact fatigue reliability of tank gear by Monte Carlo method [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2006, 28(1): 46–50.)

[6] 孙志礼, 陈良玉. 实用机械可靠性设计理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 210–211.

(Sun Zhi-li, Chen Liang-yu. Practical mechanical reliability design theory and method [M]. Beijing: Science Press, 2003: 210–211.)

[7] 闫明, 孙志礼, 杨强. 基于响应面方法的可靠性灵敏度分析方法 [J]. *机械工程学报*, 2007, 43(10): 67–70.

(Yan Ming, Sun Zhi-li, Yang Qiang. Analysis method of reliability sensitivity based on response surface methods [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2007, 43(10): 67–70.)

[8] Hastings W K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their application [J]. *Biometrika*, 1970, 57(1): 97–109.

[9] Metropolis N, Rosenbluth A W, Rosenbluth M N, et al. Equation of state calculations by fast computing machines [J]. *The Journal of Chemical Physics*, 1953, 21(6): 1087–1092.

[10] Li S T. Effects of machining errors, assembly errors and tooth modifications on loading capacity, load-sharing ratio and transmission error of a pair of spur gears [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, 42(6): 698–726.

[11] 佟操, 孙志礼, 马小英, 等. 考虑安装与制造误差的齿轮动态接触仿真研究 [J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2014, 35(7): 996–1000.

(Tong Cao, Sun Zhi-li, Ma Xiao-ying, et al. Dynamic simulation research of spur gears with assembly errors and machining errors [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2014, 35(7): 996–1000.)

[12] Box G, Behnken D. Some new three level designs for the study of quantitative variables [J]. *Technometrics*, 1960, 2(4): 455–476.

[13] Ditlevsen O, Madsen H O. Structural reliability methods [M]. New York: Wiley, 1996: 87–109.