

考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数分形模型

李小彭,王雪,运海萌,安镰锤

(东北大学 机械工程与自动化学院,辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 在传统的 M-B 接触模型的基础上,引入微凸体的弹塑性变形,建立了结合面静摩擦系数的分形模型.同时,建立了未考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数分形模型,并对两个模型进行仿真比较分析.结果表明,考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数大于未考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数,结合面静摩擦系数与法向载荷和材料特性参数呈正相关,而与分形尺度参数呈负相关;当 $1.1 \leq D \leq 1.5$ 时,结合面静摩擦系数与分形维数呈正相关;当 $1.5 \leq D \leq 1.9$ 时,结合面静摩擦系数与分形维数呈负相关.

关 键 词: 结合面;弹塑性变形;静摩擦系数;分形模型;仿真分析

中图分类号: TH 117.1

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2016)05-0673-05

Static Friction Coefficient Fractal Model of Joint Surfaces with Elastic-Plastic Beformation Considered

LI Xiao-peng, WANG Xue, YUN Hai-meng, AN Lian-chui

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: LI Xiao-peng, professor, E-mail: xpli@me.neu.edu.cn)

Abstract: Based on the traditional M-B fractal model, the contact fractal model of static friction coefficient with the elastic-plastic deformation was established. At the same time, the model without the elastic-plastic deformation considered was also built as a comparison. The results show that the static friction coefficients with elastic-plastic deformation considered is greater than that without. The static friction coefficient is positively correlated with the normal load and material parameters, but negatively with the fractal scale parameters. For $1.1 \leq D \leq 1.5$, the static friction coefficient and the fractal dimension are positively correlated, while for $1.5 \leq D \leq 1.9$, they are negatively correlated.

Key words: joint surfaces; elastic-plastic deformation; static friction coefficient; fractal prediction model; simulation analysis

结合面广泛存在于大量组合机械机构中,结构 40% ~ 60% 的柔度和 90% 以上的阻尼是因结合面而产生的^[1],研究结合面的动态特性在理论和实际应用上都有很重要的意义.

在实际工程机构中,结合面不可能完全光滑,因此,有必要对结合面的静摩擦系数进行研究.长期以来,众多学者对此进行了大量的探索研究.根据 GW 模型^[2],Chang 等^[3]经过研究,得到了一种用于计算结合面静摩擦系数的模型.盛选禹等^[4]根据 M-B 分形理论^[5],给出了预测静摩擦系数的一种方法.经典的 GW 模型因受仪器分辨

率和采样长度的限制,所以有一定的局限性,而 M-B 分形模型的建立则弥补了这些.但是,传统的 M-B 分形模型,没有对微凸体的弹塑性变形进行考虑,认为微凸体的变形是由弹性变形直接过渡到塑性变形.有文献对微凸体的变形进行了研究,发现微凸体的变形过程是从弹性变形过渡到弹塑性变形,最后过渡到塑性变形,并不是从弹性变形直接到塑性变形^[6].而在单个微凸体的变形的过程中,弹塑性变形还是占有一定比例的.因此,在建立结合面静摩擦系数的分形模型时,考虑微凸体的弹塑性变形,就显得十分重要.

基于赫兹接触理论和传统的 M - B 分形接触模型,本文引入微凸体的弹塑性变形,建立了结合面静摩擦系数分形模型.为了清楚地揭示引入微凸体弹塑性变形对结合面静摩擦系数的影响,本文在不考虑弹塑性变形的情况下,建立了结合面静摩擦系数分形模型.并利用仿真软件对这两种模型进行了比较.同时,得到了各相关参数对结合面静摩擦系数的影响.

1 M - B 分形接触修正模型

在无摩擦情况下,赫兹理论指出两个粗糙面在受载荷 Q 作用时,接触的模式可以用一个刚性平面与一个粗糙平面接触来简化表示.简化之后的模型如图 1 所示.

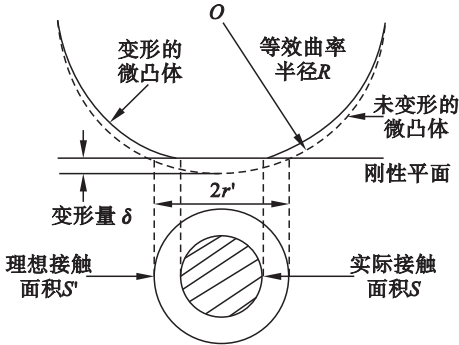


图 1 等效球体单峰与刚性平面接触示意图
Fig. 1 The contact diagram of equivalent sphere single peak and rigid plane

依据赫兹接触理论,当平面压力作用的时候,发生弹性变形微凸体的弹性变形量为

$$\delta = \left(\frac{3\pi p_m}{4E} \right)^2 R. \tag{1}$$

式中 p_m 表示作用在微凸体上的平均接触压力; E 表示等效弹性模量,并且有 $E = [(1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2]^{-1}$, E_1 , E_2 分别为图 1 中两弹性体的弹性模量; ν_1 , ν_2 分别为两弹性体的泊松比;等效单峰曲率半径 $R = [1/R_1 + 1/R_2]^{-1}$,其中 R_1 , R_2 分别为两弹性体的曲率半径.

1.1 微凸体的接触状态与相应的接触载荷

根据文献 [7] 可得微凸体的曲率半径为

$$R = S^{0.5D} G^{1-D} / \pi. \tag{2}$$

式中 S 为实际接触面积; G 为分形尺度参数; D 为分形维数.

Johnson 理论 [8] 表明,当接触面积满足 $\beta = Er/\sigma_y \pi = 30$ 时($r = \sqrt{S/\pi}$,为接触半径),微凸体将会产生塑性变形.由 Johnson 理论和公式(2)可得到临界弹塑性接触面积为

$$S_{pt} = G^2 \left(\frac{\pi^3 E^2}{900 \sigma_y^2} \right)^{\frac{1}{D-1}}. \tag{3}$$

微凸体弹性临界变形面积为 [8]

$$S_c = \left(\frac{33 \pi^{0.5} k_\mu \varphi}{40} \right)^{2/(1-D)} G^2. \tag{4}$$

式中 $\varphi = \sigma_y/E$ 表示材料的特性参数; k_μ 表示摩擦力修正因子,当 $0 \leq \mu \leq 0.3$ 时 $k_\mu = 1 - 0.228\mu$,当 $0.3 < \mu \leq 0.9$ 时 $k_\mu = 0.932e^{-1.58(\mu - 0.3)}$.

1) 当 $S_1 < S_{pt}$ 时,微凸体处于塑性接触,受到的载荷为 [7]

$$P_p(S) = K \sigma_y S. \tag{5}$$

式中 K 为与硬度 H 和屈服强度 σ_y 相关的系数,三者的关系为 $H = K \sigma_y$.

2) 当 $S_{pt} < S_1 < S_c$ 时,微凸体处于弹塑性接触,受到的载荷为

$$P_{ep}(S) = \frac{2}{3} S \sigma_y \left[2 + \ln \left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}} E G^{(D-1)}}{3 \sigma_y} \right) + \frac{1-D}{2} \ln S \right]. \tag{6}$$

3) 当 $S_1 > S_c$,微凸体处于弹性接触,受到的载荷可以表达为 [7]

$$P_e(S) = \frac{4 \pi^{0.5} E G^{(D-1)} S^{(1.5-0.5D)}}{3}. \tag{7}$$

1.2 两粗糙平面的实际接触面积

根据 M - B 分形模型,最大接触面积为 S_1 与接触点的面积分布 $n(S)$ 的关系为

$$n(S) = \frac{D}{2} \psi^{(2-D)/2} S_1^{D/2} S^{-(D+2)/2}, \quad 0 < S < S_1. \tag{8}$$

式中 ψ 为与分形维数 D 有关的分形区域扩展系数,可以查表得到; S_1 则是单个微凸体的最大接触面积.

整个接触面的实际接触面积 A_r 包含有塑性接触面积、弹塑性接触面积和弹性接触面积.

$$A_r = \int_0^{S_{pt}} n(S) S dS + \int_{S_{pt}}^{S_c} n(S) S dS + \int_{S_c}^{S_1} n(S) S dS = \frac{D}{2-D} \psi^{1-0.5D} S_1. \tag{9}$$

2 结合面法向载荷分形预估模型

2.1 未考虑弹塑性变形结合面法向载荷分形模型

当不考虑弹塑性变形时,微凸体的变形只分为塑性变形和弹性变形.

当 $S_1 > S_c$, $1 < D < 2$ 并且 $D \neq 1.5$ 时,不考虑弹塑性变形的法向总载荷可以表示为

$$P = \int_0^{S_c} P_p(S) n(S) dS + \int_{S_c}^{S_l} P_e(S) n(S) dS = g_1 S_c^{(2-D)/2} + g_2. \quad (10)$$

式中: $g_1 = \frac{D}{2-D} K \sigma_y \psi^{(2-D)/2} S_1^{D/2}$;

$$g_2 = \frac{4\pi^{0.5} D}{3(3-2D)} EG^{D-1} \psi^{(2-D)/2} \times S_1^{D/2} (S_1^{(3-2D)/2} - S_c^{(3-2D)/2}).$$

当 $S_l > S_c$ 并且 $D = 1.5$ 时, 不考虑弹塑性变形的法向总载荷可以表示为

$$P = 3K\sigma_y \psi^{1/4} S_1 + \pi^{0.5} EG^{1/2} \psi^{1/4} S_1^{3/4} (\ln S_1 - \ln S_c). \quad (11)$$

2.2 考虑弹塑性变形的结合面法向载荷分形模型

当对微凸体的弹塑性变形进行考虑时, 微凸体的变形则分为塑性变形、弹塑性变形和弹性变形。

当 $S_l > S_c$, $1 < D < 2$ 并且 $D \neq 1.5$ 时, 考虑弹塑性变形的法向总载荷可以表示为

$$P' = \int_0^{S_{pt}} P_p(S) n(S) dS + \int_{S_{pt}}^{S_c} P_{ep}(S) n(S) dS + \int_{S_c}^{S_l} P_e(S) n(S) dS = g_1 S_{pt}^{(2-D)/2} + g_2 + g_3. \quad (12)$$

$$\text{式中: } g_3 = \frac{2D}{3(2-D)} \sigma_3 \psi^{(2/D)/2} S_1^{D/2} \times \{ 2 + \ln \left(\frac{\pi^{3/2} EG^{D-1}}{3\sigma_y} \right) \} (S_c^{(2-D)/2} - S_{pt}^{(2-D)/2}) + \frac{1-D}{2} \times [S_c^{(2-D)/2} (\ln S_c - \frac{2}{2-D}) - S_{pt}^{(2-D)/2} (\ln S_{pt} - \frac{2}{2-D})] \}$$

当 $S_l > S_c$ 并且 $D = 1.5$ 时, 考虑弹塑性变形的法向总载荷可以表示为

$$P' = 3K\sigma_y \psi^{1/4} S_1^{3/4} S_{pt}^{1/4} + \pi^{0.5} EG^{1/2} \psi^{1/4} S_1^{3/4} (\ln S_1 - \ln S_c) + 2\sigma_y \psi^{1/4} S_1^{3/4} \{ 2 + \ln \frac{\pi^{3/2} EG^{1/2}}{3\sigma_y} \} (S_c^{1/4} - S_{pt}^{1/4}) - [S_c^{1/4} (\ln S_c - 4) - S_{pt}^{1/4} (\ln S_{pt} - 4)] \} 4. \quad (13)$$

3 结合面切向载荷分形预估模型

当微凸体已经发生塑性变形时, 在作用法向载荷的情况下, 会产生塑性流动, 就没有承受切向载荷的能力。所以, 在计算微凸体切向载荷的时

$$f = \frac{Q'^*}{P'^*} = \frac{\frac{8\varphi}{\pi(6-3\nu)} A_r^* - g_5 S_{pt}^{*(2-D)/2} + \frac{8(2\nu-1)}{\sqrt{\pi(6-3\nu)}} g_7 + \frac{2(2\nu-1)}{3} g_5 g_6}{K \frac{\pi(6-3\nu)}{8} g_5 + \sqrt{\pi} g_7 + \frac{\pi(2-\nu)}{4} g_5 g_6}. \quad (20)$$

当 $D = 1.5$ 时:

候, 就没有必要考虑塑性变形阶段^[9]。

3.1 未考虑弹塑性变形结合面切向载荷分形模型

当 $1 < D < 2$ 并且 $D \neq 1.5$ 时, 未考虑弹塑性变形的微凸体, 弹性阶段的切向载荷为

$$T_e = \int_{S_c}^{S_l} \left[\frac{8S}{\pi(6-3\nu)} \sigma_y + \frac{8(2\nu-1)}{\pi(6-3\nu)} P_e(S) \right] n(S) dS = g_4 (S_1^{(2/D)/2} - S_c^{(2/D)/2}) + \frac{8(2\nu-1)}{\pi(6-3\nu)} g_2. \quad (14)$$

$$\text{式中: } g_4 = \frac{8D\sigma_y}{\pi(2-D)(6-3\nu)} \psi^{2-D/2} S_1^{D/2}.$$

当 $D = 1.5$ 时, 未考虑弹塑性变形的微凸体, 弹性阶段的切向载荷为

$$T_e = \frac{24\sigma_y}{\pi(6-3\nu)} \psi^{1/4} (S_1 - S_1^{3/4} S_c^{1/4}) + \frac{8(2\nu-1)}{\pi^{0.5}(6-3\nu)} \times EG^{1/2} \psi^{1/4} S_1^{3/4} (\ln S_1 - \ln S_c). \quad (15)$$

对于未考虑弹塑性变形的切向总载荷可以表示为

$$Q = T_e. \quad (16)$$

3.2 考虑弹塑性变形的结合面切向载荷分形模型

当 $1 < D < 2$ 时, 考虑弹塑性变形的微凸体, 弹塑性阶段的切向载荷为

$$T_{ep} = \int_{S_{pt}}^{S_c} \left(\frac{8S}{\pi(6-3\nu)} \sigma_y + \frac{8(2\nu-1)}{\pi(6-3\nu)} P_{ep}(S) \right) n(S) dS = g_4 (S_c^{(2-D)/2} - S_{pt}^{(2-D)/2}) + \frac{8(2\nu-1)}{\pi(6-3\nu)} g_3. \quad (17)$$

考虑弹塑性变形时, 切向总载荷可以表示为

$$Q' = T_e + T_{ep}. \quad (18)$$

4 结合面静摩擦系数的分形模型

当结合面有相对滑动趋势时, 处于弹性变形和弹塑性变形的微凸体将发生完全屈服, 因而, 最大静摩擦力就可以用切向总载荷 Q 来表达。

因此, 未考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数可以表示为

$$f = \frac{Q^*}{P^*}. \quad (19)$$

同理, 考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数也被得到。

当 $1 < D < 2$ 且 $D \neq 1.5$ 时:

$$f = \frac{Q'^*}{P'^*} = \frac{g_8 + \frac{8(2\nu-1)}{3^{3/4}\sqrt{\pi(6-3\nu)}}g_9 + g_{10} + \frac{8(2\nu-1)}{\pi(6-3\nu)}g_{11}}{3^{1/4}K\phi\psi^{1/16}A_r^{*3/4}S_{pt}^{*1/4} + 3^{-3/4}\pi^{0.5}g_9 + g_{11}} \quad (21)$$

式中: $Q'^* = Q'/A_aE$; $P'^* = P/A_aE$; $A_r^* = A_r/A_a$;
 $S_1^* = \frac{S_1}{A_a} = \frac{(2-D)A_r^*}{D\psi^{(2-D)/2}}$; $S_c^* = \frac{S_c}{A_a}$; $G^* = \frac{G}{\sqrt{A_a}}$;
 $g_5 = \frac{8\phi}{\pi(6-3\nu)}\psi^{(2-D)^2/4}(\frac{D}{2-D})^{2-D/2}A_r^{*D/2}$;
 $g_6 = [2 + \ln(\frac{\pi^{3/2}G^{(D-1)}}{3\phi})[S_c^{*(2-D)/2} - S_{pt}^{*(2-D)/2}] + \frac{1-D}{2}[S_c^{*(2-D)/2}(\ln S_c - \frac{2}{2-D}) - S_{pt}^{*(2-D)/2} \times (\ln S_{pt} - \frac{2}{2-D})]$;
 $g_7 = \frac{4}{3}\frac{D}{3-2D}(\frac{2-D}{D})^{D/2}\psi^{(2-D)^2/4}G^{*(D-1)} \times S_r^{*D/2}$;
 $[(\frac{2-D}{D}\psi^{(D-2)/2}A_r^*)^{(3-2D)/2} - S_c^{*(3-2D)/2}]$;
 $g_8 = \frac{24\phi}{\pi(6-3\nu)}\psi^{1/4}[\frac{1}{3}\psi^{1/4}A_r^* - (\frac{1}{3}\psi^{1/4}A_r^*)^{3/4}S_c^{*1/4}]$;
 $g_9 = G^{*1/2}\psi^{1/16}A_r^{*3/4}\ln[A_r^*/(3\psi^{1/4}S_c^*)]$;
 $g_{10} = \frac{3^{1/4}8\phi}{\pi(6-3\nu)}\psi^{1/16}A_r^{*3/4}(S_c^{*1/4} - S_{pt}^{*1/4})$;
 $g_{11} = 2 \times 3^{-3/4}\phi\psi^{1/16}A_r^{*3/4} \times [2 + \ln(\frac{\pi^{3/2}G^{1/2}}{3\phi})]$
 $(S_c^{*1/4} - S_{pt}^{*1/4}) - \frac{1}{4}[S_c^{*1/4}(\ln S_c - 4) - S_{pt}^{*1/4}(\ln S_{pt} - 4)]$;

5 结合面静摩擦系数仿真分析

由于篇幅有限,本文仅对考虑弹塑性变形时,结合面静摩擦系数与各参数之间的非线性关系进行了仿真分析。

5.1 分形维数和法向载荷对静摩擦系数的影响

根据式(20)和式(21),当 $K=2.8$, $\varphi=1.0$, $G=1.0 \times 10^{-10}$, D 分别取 $1.1 \sim 1.9$, 对静摩擦系数与法向载荷的关系进行仿真,结果如图 2 所示。

图 2 表明,结合面的静摩擦系数与法向载荷呈正相关,这与文献[24]的结论相同。当 $1.1 \leq D \leq 1.5$, 结合面的静摩擦系数与分形维数呈正相关;当 $1.5 \leq D \leq 1.9$, 结合面静摩擦系数与分形维数呈负相关。

5.2 分形尺度参数对静摩擦系数的影响

当 $K=2.8$, $\varphi=1.0$ 时,对静摩擦系数与分形尺度参数的关系进行仿真,仿真结果如图 3 所示。

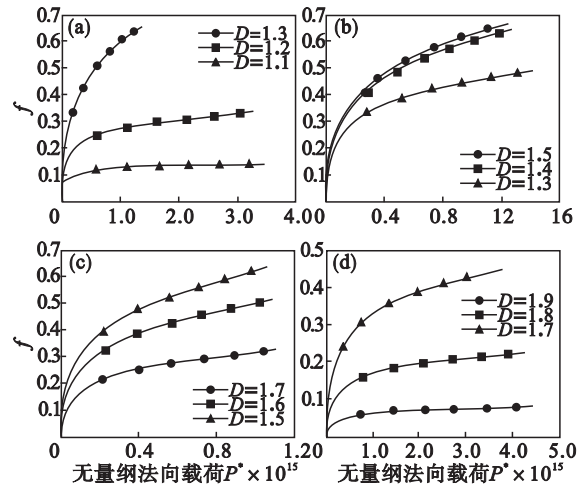


图 2 分形维数和法向载荷对静摩擦系数的影响
Fig. 2 Influence of fractal dimension and normal load on static friction coefficient

(a)— $D=1.1 \sim 1.3$; (b)— $D=1.3 \sim 1.5$;
(c)— $D=1.5 \sim 1.7$; (d)— $D=1.7 \sim 1.9$.

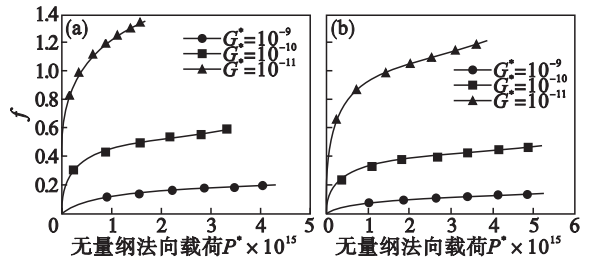


图 3 分形尺度参数对静摩擦因数的影响曲线
Fig. 3 Influence of fractal scale parameters on static friction coefficient

(a)— $D=1.3$; (b)— $D=1.7$.

图 3 表明,结合面静摩擦系数与分形尺度参数呈负相关,这与文献[5]的结论是一致的。因为分形尺度参数 G^* 越小,结合面间粗糙度就越小。

5.3 材料特性参数对静摩擦系数的影响

取 $K=2.8$, $G^*=1.0 \times 10^{-10}$, $D=1.9$, φ 分别取 $0.01, 0.1, 1.0$ 时,对结合面静摩擦系数与材料特性参数的关系进行仿真,结果如图 4 所示。

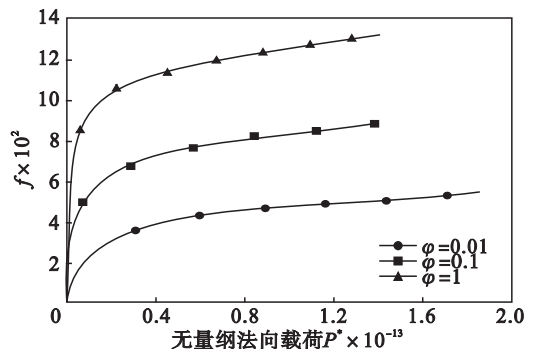


图 4 材料特性参数对静摩擦因数的影响曲线
Fig. 4 Influence of material parameters on static friction coefficient

图 4 表明,结合面的静摩擦系数与材料特性参数呈正相关。

5.4 弹塑性变形对结合面静摩擦系数影响的对比

根据式(19)、式(20)和式(21),当 $K=2.8$, $\varphi=1.0$, $G=1.0 \times 10^{-10}$ 时,未考虑弹塑性变形与考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数的仿真结果的对比,如图 5 所示。

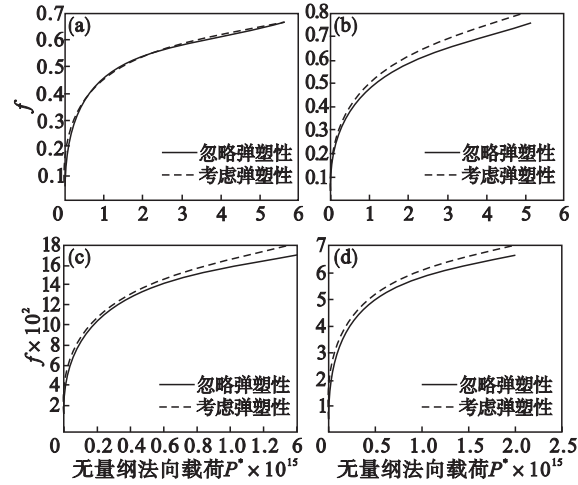


图 5 弹塑性变形对静摩擦系数的影响曲线
Fig. 5 Influence of elastic-plastic deformation on static friction coefficient
(a)— $D=1.3$; (b)— $D=1.6$;
(c)— $D=1.8$; (d)— $D=1.9$ 。

从图 5 可以看出,弹塑性变形对结合面的静摩擦系数有影响。但是,影响比较小,这主要是因为弹塑性接触区域所占的比例小。相比于未考虑弹塑性变形的情况,考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数更大。

6 结 论

- 1) 弹塑性变形影响结合面静摩擦系数分形模型的建立。考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数要大于未考虑弹塑性变形的结合面静摩擦系数。
- 2) 结合面静摩擦系数与法向载荷和材料特

性参数呈正相关,而与分形尺度参数呈负相关。分形维数对结合面静摩擦系数的影响比较复杂,当 $1.1 \leq D \leq 1.5$ 时,结合面静摩擦系数与分形维数呈正相关;当 $1.5 \leq D \leq 1.9$ 时,结合面静摩擦系数与分形维数呈负相关。

参考文献：

[1] Ren Y, Beards C F. Identification of effective linear joints using coupling and joint identification techniques[J]. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* ,1998 ,120(2) 331 -338.

[2] Greenwood J A, Williamson J B P. Contact of nominally flat surfaces[J]. *Proceeding of the Royal Society of London :A* , 1966 295(1442) 300 -319.

[3] Chang W R, Etsion I, Bogy D B. Static friction coefficient model for metallic rough surfaces[J]. *ASME Journal of Tribology* ,1988 ,110(1) 57 -63.

[4] 盛选禹, 雒建斌, 温诗铸, 等. 基于分形接触的静摩擦系数预测[J]. *中国机械工程* ,1998 9(7) :16 -18.
(Sheng Xuan-yu, Luo Jian-bin, Wen Shi-zhu, et al. Fractal prediction model for static friction coefficient of joint surfaces [J]. *Journal of Chinese Mechanical Engineering* ,1998 ,9 (7) :16 -18.)

[5] Majumdar A, Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. *ASME Journal of Tribology* ,1991 ,113(1) :1 -11.

[6] Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime :part I-elastic contact and heat transfer analysis[J]. *ASME Journal of Tribology* ,1994 ,116(6) 812 -823.

[7] 李小彭, 赵光辉, 梁亚敏, 等. 两圆柱体结合面法向刚度分形预估模型及其仿真分析[J]. *农业机械学报* ,2013 44(10) : 277 -281.
(Li Xiao-peng, Zhao Guang-hui, Liang Ya-min, et al. Fractal prediction model for normal contact stiffness of cylinders joint surface and its simulation analysis[J]. *Journal of Agricultural Machinery* 2013 44(10) 277 -281.)

[8] Johnson K L. Contact mechanics[M]. Cambridge :Cambridge University Press ,1985.

[9] Kogut L, Etsion I. A semi-analytical solution for the sliding inception of a spherical contact[J]. *ASME Journal of Tribology* 2003 ,125(3) :499 -506.