

doi :10. 3969/j. issn. 1005 - 3026. 2016. 07. 024

横观各向同性岩土结构极限承载力的数值研究

常江芳,楚锡华,徐远杰
(武汉大学 土木建筑工程学院,湖北 武汉 430072)

摘 要: 基于 Cosserat 连续体,建立了描述横观各向同性岩土材料的弹塑性模型.在该模型中,弹性本构关系由 5 个变形参数描述,塑性阶段通过引入组构张量及加载方向建立了修正的 Drucker - Prager 准则.针对上述模型推导了一致性映射返回算法的迭代格式及模量矩阵.结合适用于 Cosserat 连续体的平面应变 8 节点减缩单元应用 ABAQUS 用户自定义单元接口 UEL 进行了数值实现.数值算例分析了各向异性程度和材料主方向对横观各向同性岩土结构的极限承载力和变形局部化模式的影响.结果表明,所建立模型能较好地模拟横观各向同性岩土结构的应变局部化行为,且较好地解决了伴随应变局部化现象出现的网格依赖性问题.

关 键 词: 岩土结构;横观各向同性;Cosserat 连续体;应变局部化;极限承载力;数值模拟

中图分类号: O 343 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005 - 3026(2016)07 - 1022 - 06

Numerical Investigation of Ultimate Bearing Capacity for Transversely Isotropic Geostructures

CHANG Jiang-fang , CHU Xi-hua , XU Yuan-jie
(School of Civil and Architectural Engineering , Wuhan University , Wuhan 430072 , China. Corresponding author : CHANG Jiang-fang , E-mail : cjf881024@ 163. com)

Abstract : An elastic-plastic model for transversely isotropic geostructures is developed based on the Cosserat continuum. In the model , the elastic constitutive relationship is described by 5 deformation parameters and the Drucker-Prager yield criterion is extended by introducing fabric tensor and loading direction in the plastic stage. The iterative format for return mapping algorithms and the tangent modulus matrix are formulated for the proposed model. The numerical simulation is implemented based on the user subroutine (UEL) of ABAQUS , and a plane strain 8-noded reduced integrated element is used. The influence of the material principal direction and the anisotropic degree on the strain localization and the bearing capacity of the structure are analyzed. Numerical results show the validity and performance of the proposed model in simulating the strain localization behavior of transversely isotropic geostructures. Furthermore , the mesh dependency accompanied with strain localization is effectively solved.

Key words : geostructures ; transversely isotropy ; Cosserat continuum ; strain localization ; ultimate bearing capacity ; numerical simulation

自然界的岩土材料一般均具有很强的各向异性性质,而横观各向同性则为较常见的一种体现形式.该类岩土介质的弹性行为通常采用 5 个弹性参数加以描述;其塑性行为和破坏机制与其他岩土材料也存在显著差异,即随着加载方向和层面倾角的变化,材料强度具有很强的各向异性^[1-2].为此,近年来建立了大量的各向异性强度准则^[3-4],很多学者认为岩土材料强度的各向异性与其微结构有密切关系,可以考虑将组构张量和加载方向及应力状态相联系,作为各向异性参数引入到各向同性强度准则中以模拟岩土材料的各向异性性质. Pietruszczak 等提出了一个各向异性屈服准则^[4],给出了各向异性程度及加载方向对材料强度的影响的理论分析,其各向异性参数

是应力和微结构张量联合不变量的显式函数,使得实验验证更易实现,该准则也被应用到了多种岩土材料及结构的分析中^[5].

岩土结构的破坏一般最先由微裂纹、微孔洞或软弱夹层等内部缺陷诱发局部变形,并逐渐发展到一个具有有限宽度的窄带,即剪切带.人们长期关注剪切带产生的条件^[6-7],以及影响剪切带发展演化的各种因素,并基于有限元软件作了大量的数值模拟.然而由于经典连续体理论不包含任何内部长度尺度,导致数值模拟中常常存在网格依赖性.为此人们发展了多种正则化方法,微极理论便为其中的一种,该理论又称为 Cosserat 连续体理论^[8],引入了独立的转动自由度和偶应力及相应的微曲率,使得本构方程中包含了一个内部长度参数,可以有效地解决网格依赖性问题.

本文的目的是发展适用于横观各向同性岩土材料的无网格依赖性的弹塑性有限元模型,从而对横观各向同性岩土结构的力学行为做出比较全面合理的预测与解释.对横观各向同性岩土材料多强调强度的各向异性^[3-5,9],本文在文献[9]的基础上,通过考虑弹性阶段的各向异性,建立了一个完整的横观各向同性的弹塑性模型,模拟了横观各向同性岩土结构的应变局部化现象,并对各向异性参数及材料主方向对剪切带及结构承载力的影响进行了分析.

1 基于 Cosserat 连续体的横观各向同性弹塑性模型

1.1 Cosserat 连续体的横观各向同性弹性本构描述

对于平面应变问题, Cosserat 连续体的弹性应力应变关系可以表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}_e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

其中,

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yx} \quad m_{xz}/l_c \quad m_{yz}/l_c)^T, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yx} \quad \kappa_{xz} l_c \quad \kappa_{yz} l_c)^T. \quad (3)$$

其中 κ_{xz} 和 κ_{yz} 为微曲率, m_{xz} 和 m_{yz} 为与微曲率共轭的偶应力,如图 1 所示.

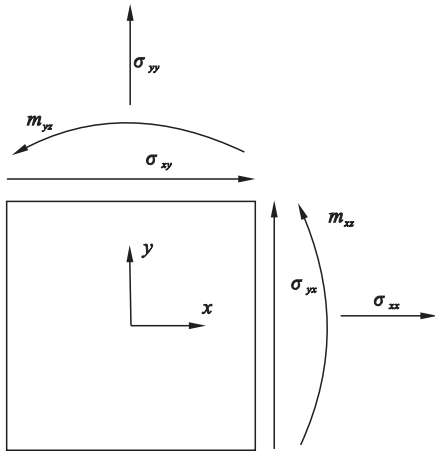


图 1 二维 Cosserat 连续体应力和偶应力示意图
Fig. 1 Stress and couple-stress in a two-dimensional Cosserat continuum

\boldsymbol{D}_e 为弹性本构矩阵,当采用如图 2 所示局部坐标时,可表示为

$$\boldsymbol{D}_e^* = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{12} & d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 + G_c & G_2 - G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 - G_c & G_2 + G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{E_1(1 - m\nu_2^2)}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2m\nu_2^2)}, & d_{12} &= \frac{E_1\nu_2}{1 - \nu_1 - 2m\nu_2^2}, \\ d_{13} &= \frac{E_1(\nu_1 + m\nu_2^2)}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2m\nu_2^2)}, & d_{22} &= \frac{E_2(1 - \nu_1)}{1 - \nu_1 - 2m\nu_2^2}, \\ G_1 &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}, & m &= \frac{E_1}{E_2}. \end{aligned}$$

其中 E_1 为各向同性面方向的弹性模量, E_2 为各向同性面法向的弹性模量, ν_1 为各向同性面方向的泊松比, ν_2 为各向同性面法向的泊松比, G_2 为各向同性面法向的剪切模量, G_c 为 Cosserat 剪切模量.

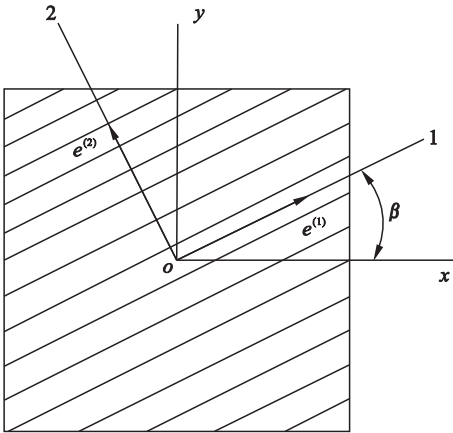


图 2 横观各向同性材料主方向示意图
Fig. 2 Schematic of material principal orientation

在图 2 中 , $1o2$ 为局部坐标系 , xoy 为整体坐标系 .3 轴垂直于 $1o2$ 面 , $1o3$ 面为各向同性面 , 2 为其法线方向 ,则整体坐标系下的弹性本构矩阵

为

$$D_e = R^T D_e^* R . \tag{5}$$

其中 R 为转换矩阵 :

$$R = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin^2\beta & 0 & \sin\beta\cos\beta & \sin\beta\cos\beta & 0 & 0 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 0 & -\sin\beta\cos\beta & -\sin\beta\cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta\cos\beta & \sin\beta\cos\beta & 0 & \cos^2\beta & -\sin^2\beta & 0 & 0 \\ -\sin\beta\cos\beta & \sin\beta\cos\beta & 0 & -\sin^2\beta & \cos^2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} . \tag{6}$$

1.2 Cosserat 连续体的横观各向同性屈服准则

除了弹性阶段变形参数的各向异性外 ,材料进入塑性阶段 ,需考虑其强度准则的各向异性 .Pietruszczak^[4]基于应力不变量与组构张量给出了一个各向异性材料强度参数的描述途径 :

$$\eta = \eta_0 (1 + \Omega_{ij} l_i l_j) . \tag{7}$$

其中 η 为与应力状态有关的强度参数 ; η_0 为 η 的平均值 ; Ω_{ij} 为组构张量的偏张量 ,描述 η 偏离 η_0 的程度 ; l_i 为加载向量的各个分量 .式(7)用 Ω_{ij} 的主值表示并考虑横观各向同性材料满足 $\Omega_1 = \Omega_3$,又由于 $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0$ 及 $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$,式(7)可进一步表示为

$$\eta = \eta_0 [(1 + \Omega_1 (1 - 3l_2^2))] . \tag{8}$$

加载分量可按式计算 :

$$l_2^2 = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2)}{\text{tr}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2} . \tag{9}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 表示应力张量 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}^{(2)} \otimes \boldsymbol{e}^{(2)} - \boldsymbol{e}_i^{(2)} \boldsymbol{e}_i^{(2)} (i = 1 , 2 , 3)$ 表示 2 方向与整体坐标系下 3 个坐标轴夹角的余弦 ,如图 2 所示 :

$$\boldsymbol{e}^{(2)} = (\boldsymbol{e}_1^{(2)} \quad \boldsymbol{e}_2^{(2)} \quad \boldsymbol{e}_3^{(2)})^T = (-\sin\beta \quad \cos\beta \quad 0)^T . \tag{10}$$

将上述横观各向同性强度参数的描述方式与 Drucker - Prager 准则相结合 ,则可得到一个适用于描述横观各向同性岩土材料的扩展的 Drucker - Prager 准则 :

$$f = q + A_\varphi p + B_\varphi = 0 . \tag{11}$$

其中 $q = \sqrt{3J_2}$, $p = \frac{1}{3} I_1$; J_2 , I_1 分别为偏应力第二不变量和应力第一不变量 ,在 Cosserat 连续体中分别表示为

$$J_2 = \frac{\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\sigma}}{6} , I_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} ; \tag{12}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \tag{13}$$

A_φ , B_φ 为内摩擦角 φ 和黏聚力 c 的函数 ,这里考虑内摩擦角的各向异性 :

$$\tan\varphi = \tan\varphi_0 [1 + \Omega_1 (1 - 3l_2^2)] . \tag{14}$$

若 Drucker - Prager 准则为 Mohr - Coulomb 准则的内接圆 ,并考虑黏聚力为线性硬化或软化 ,则可将其分别表示为

$$A_\varphi = \frac{6\sin\varphi}{3 + \sin\varphi} , B_\varphi = \frac{-6c\cos\varphi}{3 + \sin\varphi} , \tag{15}$$
$$c = c_0 + h_c^p \bar{\epsilon}^p .$$

其中 c_0 为初始黏聚力 ; h_c^p 为硬化(软化)参数 ; $\bar{\epsilon}^p$ 为等效塑性应变 .

式(11) ,式(14) ,式(15)构成了适用于横观各向同性岩土材料的屈服准则 .

对岩土材料一般采用非关联流动法则 ,塑性势函数及其参数取与屈服函数类似的形式 ,即

$$g = q + A_\psi p + B_\psi = 0 , \tag{16}$$

$$A_\psi = \frac{6\sin\psi}{3 + \sin\psi} , B_\psi = \frac{-6c\cos\psi}{3 + \sin\psi} , \tag{17}$$

$$\tan\psi = \tan\psi_0 [1 + \Omega_1 (1 - 3l_2^2)] . \tag{18}$$

其中 ψ 为膨胀角 .

记塑性流动方向为

$$\boldsymbol{r} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + A_\psi \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + p \frac{\partial g}{\partial A_\psi} \frac{\partial A_\psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial B_\psi} \frac{\partial B_\psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} . \tag{19}$$

式(19)最后两项体现了各向异性的影响 .

2 数值算例

以 ABAQUS 软件为平台,开发 UEL 用户单元子程序,采用平面应变 8 节点等参元(CPE8R) 4 积分点减缩积分进行数值计算. 计算模型如图 3 所示. 上下边界固定 x 方向位移, 左右边界自由. 上下边界施加对称的位移荷载. 表 1 为计算参数, 其中弹性变形参数取自文献 [10], 强度参数均取自黏土材料合理范围内, Cosserat 参数 G_c , l_c 根据现有经验取值 β 和 Ω_1 的值^[5]会在具体的算例中给出.

2.1 网格依赖性及数值收敛性检验

由于经典连续体中未引入任何内部长度参数, 导致材料在伴随应变软化出现应变局部化现象时剪切带宽度病态地依赖于网格尺寸. 数学角度的解释是, 随着应变软化的出现, 控制方程丧失了椭圆性. 图 4 给出了三种网格密度等效塑性应变分布图, 等效塑性应变由 UVARM15 表示. 可以看出随着网格加密, 等效塑性应变峰值有

所提高, 但是剪切带的宽度基本保持不变. 正是由于引入转动自由度和内部长度参数的原因, 使得 Cosserat 连续体较好地解决了网格依赖性问题. 数值结果显示本文在应力更新过程中所采用的向后欧拉算法具有较好的收敛性, 能够达到预期的效果.

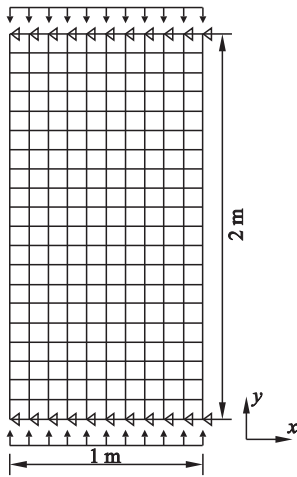


图 3 计算模型示意图
Fig. 3 Sketch of computing model

表 1 材料参数
Table 1 Material parameters

$\frac{E_1}{\text{MPa}}$	ν_1	$\frac{E_2}{\text{MPa}}$	ν_2	$\frac{G_2}{\text{MPa}}$	φ_0 ($^\circ$)	ψ_0 ($^\circ$)	$\frac{c_0}{\text{kPa}}$	$\frac{h_p}{\text{kPa}}$	$\frac{\beta}{(^\circ)}$	Ω_1	$\frac{G_c}{\text{MPa}}$	$\frac{l_c}{\text{m}}$
30.5	0.139	16.8	0.146	8.92	20	18	11.4	-30	-	-	4.46	0.01

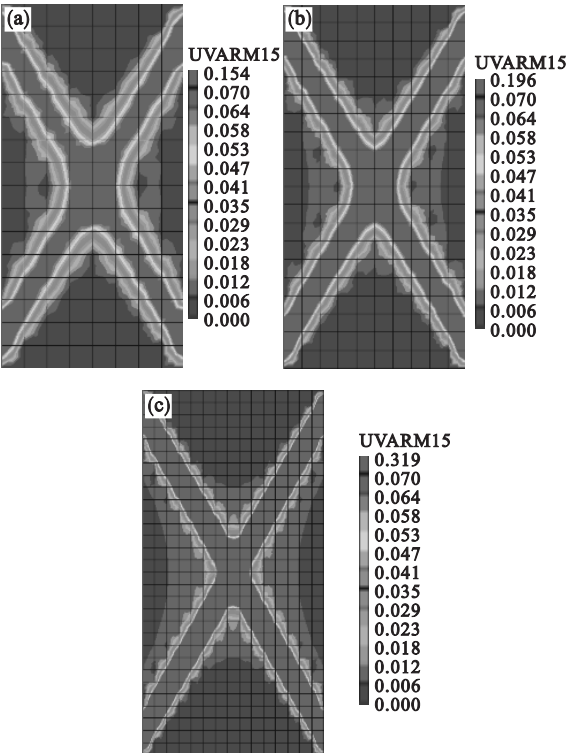


图 4 不同网格密度下等效塑性应变分布图
Fig. 4 Distribution of equivalent plastic strain with different mesh densities

(a)— 8×16 ; (b)— 10×20 ; (c)— 15×30 .

2.2 材料主方向及各向异性程度对剪切带及结构承载力的影响

图 5 为 $\beta = 30^\circ$, $\Omega_1 = -0.05$ 时, 剪切带的形成过程演化图, 其中 u_y 为上边界施加的位移. 这里 Ω_1 取负值意味着材料各向同性面法向具有较高的强度^[5]. 可以看出剪切带率先在较弱的方向形成, 之后逐渐发展并形成另外一支较弱的与之共轭的剪切带.

图 6 为 $\Omega_1 = -0.05$ 时等效塑性应变随材料主方向的变化云图, 可见 $\beta = 0^\circ$ 和 $\beta = 90^\circ$ 时两条共轭的剪切带基本呈对称分布, $\beta = 30^\circ$ 和 $\beta = 60^\circ$ 时两条剪切带出现强弱之分, 且随着 β 的增大等效塑性应变峰值逐渐增大, 结构趋向于沿较弱方向最先发生破坏. 剪切带倾角约为 $\alpha = 56^\circ$, 如图 6d 所示. 图 7 为 $\beta = 30^\circ$ 时等效塑性应变随各向异性程度变化的云图, 可以看出等效塑性应变随 $|\Omega_1|$ 的增大而减小, 且弱剪切带对结构破坏的影响逐渐降低, 使得强剪切带成为结构破坏的主要原因, 说明各向异性程度的增加使结构破坏模式对方向更为敏感.

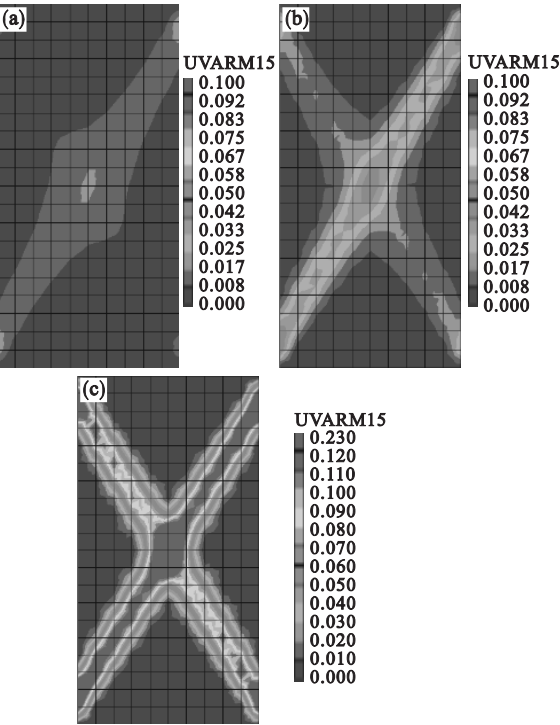


图 5 剪切带随加载的演化图
Fig. 5 Variation of shear band with the increasing displacement
(a)— $u_y = 6.6 \text{ mm}$; (b)— $u_y = 8.4 \text{ mm}$;
(c)— $u_y = 12 \text{ mm}$.

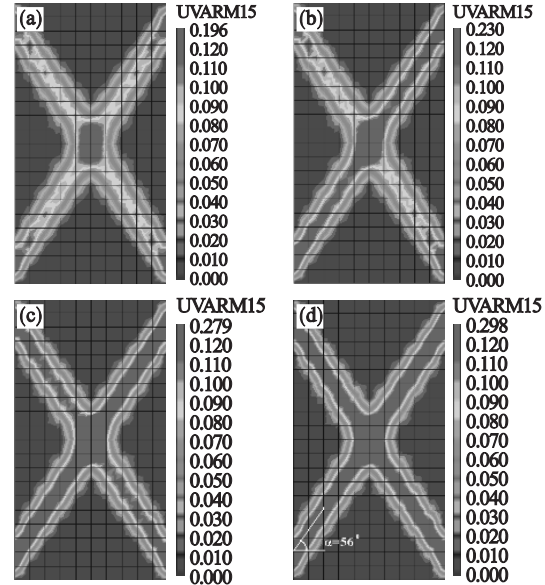


图 6 不同材料主方向下等效塑性应变分布图
Fig. 6 Distribution of equivalent plastic strain with different material principal directions
(a)— $\beta = 0^\circ$; (b)— $\beta = 30^\circ$;
(c)— $\beta = 60^\circ$; (d)— $\beta = 90^\circ$.

图 8 为 D_e 和 f 均为横观各向同性时不同材料主方向下的承载力 - 位移曲线 ,若 D_e 为横观各向同性 f 为各向同性 ,则无法体现结构强度的方向相关性 ;若 D_e 为各向同性 f 为横观各向同性 ,则无法体现结构刚度的方向相关性 ;只有按照

本文的 D_e 和 f 均为横观各向同性建立的弹塑性模型才能全面合理地模拟横观各向同性岩土结构强度和刚度随材料主方向的演化.

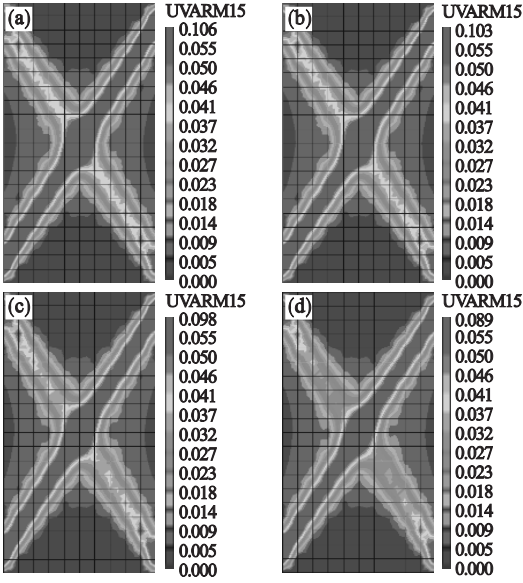


图 7 不同各向异性程度下等效塑性应变分布图($\beta = 30^\circ$)
Fig. 7 Distribution of equivalent plastic strain with different anisotropic degrees($\beta = 30^\circ$)
(a)— $\Omega_1 = 0$; (b)— $\Omega_1 = -0.05$;
(c)— $\Omega_1 = -0.1$; (d)— $\Omega_1 = -0.15$.

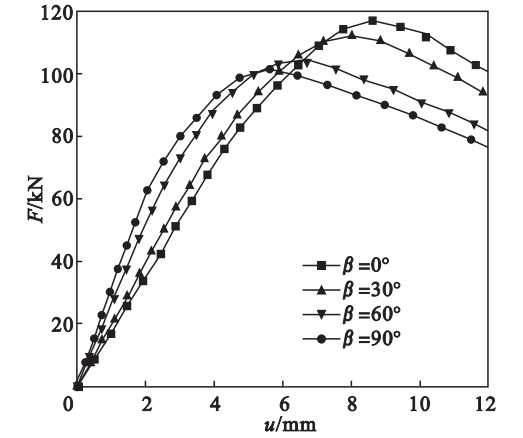


图 8 承载力 - 位移曲线随材料主方向的演化
Fig. 8 Variation of bearing capacity-displacement with material principal direction

由图 9 可以看出 $\beta = 0^\circ$ 时结构承载力随 $|\Omega_1|$ 的增大而增大 ,而 $\beta = 90^\circ$ 时则随 $|\Omega_1|$ 的增大而降低 .为了更好地描述结构承载力随材料主方向和各向异性程度的演化规律 ,图 10 给出了归一化的曲线 ,可以看出整体上关于 $\beta = 90^\circ$ 对称 ,当 $\beta \in [0, 90^\circ]$ 时 ,承载力随 β 的增大而降低 ,随 Ω_1 的演化则存在一个反转点 ,约为 $\beta = 45^\circ$,该点结构承载力与各向异性程度无关 ,该点之前承载力随 $|\Omega_1|$ 的增大而增大 ,该点之后则随 $|\Omega_1|$ 的增大

而降低,当 $\beta \in [90^\circ, 180^\circ]$ 时, 反转点为 $\beta = 135^\circ$, 该规律与文献[5]中的一致, 验证了程序的正确性.

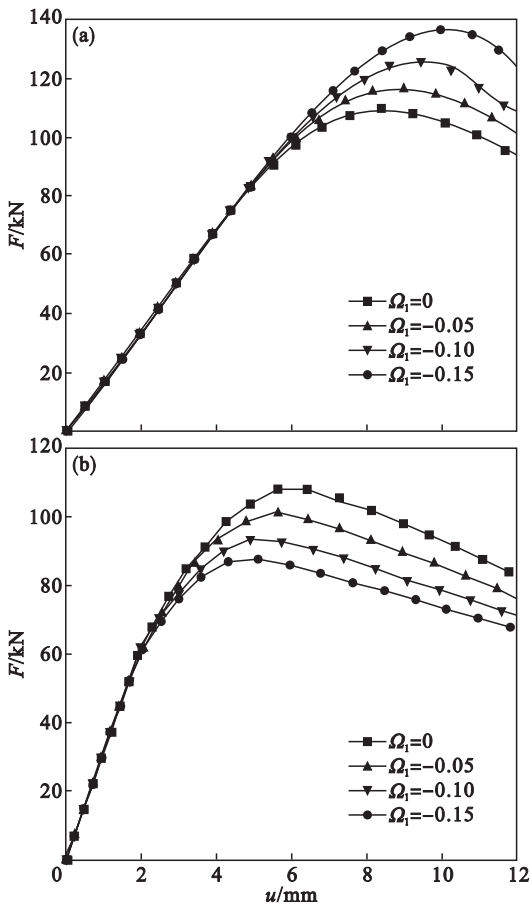


图9 承载力-位移曲线随各向异性程度的演化
Fig. 9 Variation of bearing capacity-displacement with different anisotropic degree
(a)— $\beta = 0^\circ$; (b)— $\beta = 90^\circ$.

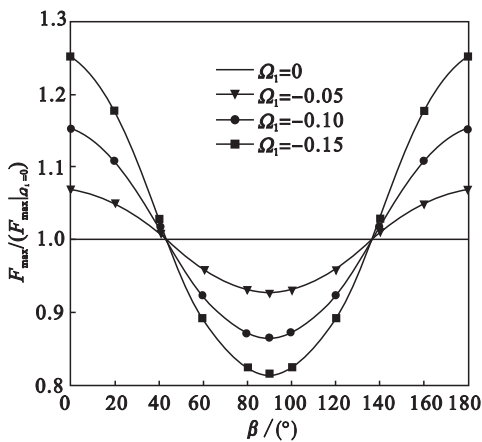


图10 承载力随主方向 β 及各向异性程度 Ω_1 的演化曲线
Fig. 10 Variation of bearing capacity with β and Ω_1

3 结 论

1) 材料主方向直接影响横观各向同性岩土

结构的刚度和承载力,本文考虑弹性阶段本构矩阵的坐标旋转及塑性阶段屈服准则的各向异性而建立的弹塑性模型可以对横观各向同性岩土结构的刚度和承载力随层面倾角的演化做出较为合理的模拟.

2) 材料主方向和各向异性程度对应变局部化模式有较大影响. 对于 $\beta \neq 0^\circ$ 和 $\beta \neq 90^\circ$ 的情况, 结构趋向于沿较弱方向形成单一剪切带而破坏; 对于 $\beta = 0^\circ$ 或 $\beta = 90^\circ$ 的情况, 由于对称性, 结构则趋向于形成两条共轭的成 X 形分布的剪切带破坏.

3) 由于 Cosserat 连续体的控制方程中包含了内部长度参数, 能够对剪切带的发展演化及其宽度进行合理的预测.

参考文献：

- [1] Duncan J M, Seed H B. Strength variation along failure surfaces in clay[J]. *Journal of Soil Mechanics & Foundations Division*, 1966, 92(6) : 81 - 104.
- [2] Nova R. The failure of transversely isotropic rocks in triaxial compression[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1980, 17(6) : 325 - 332.
- [3] Gao Z W, Zhao J D, Yao Y P. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials[J]. *International Journal of Solids and Structures* 2010, 47(22) : 3166 - 3185.
- [4] Pietruszczak S, Mroz Z. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor[J]. *Computers and Geotechnics* 2000, 26(2) : 105 - 112.
- [5] Azami A, Pietruszczak S, Guo P. Bearing capacity of shallow foundations in transversely isotropic granular media[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 2010, 34(8) : 771 - 793.
- [6] Rice J R, Rudnicki J W. A note on some features of the theory of localization of deformation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1980, 16(7) : 597 - 605.
- [7] Dietsche A, Steinmann P, Willam K. Micropolar elastoplasticity and its role in localization[J]. *International Journal of Plasticity*, 1993, 9(7) : 813 - 831.
- [8] Cosserat E, Cosserat F. Théorie des corps déformables[M]. Paris : Hermann, 1909.
- [9] Chang J F, Chu X H, Xu Y J. Finite-element analysis of failure in transversely isotropic geomaterials[J]. *International Journal of Geomechanics* 2014, 15(6) : 04014096. DOI : 10.1061/(ASCE) GM.1943 - 5622.0000455
- [10] 金耀华, 孙炎, 钱玉林. 水平条形均布荷载下横观各向同性弹性地基的位移分析[J]. *岩土力学*, 2008, 26(sup 1) : 163 - 167.
(Jin Yao-hua, Sun Yan, Qian Yu-lin. Analysis of displacements of transversely isotropic foundation under level strip uniformly distributed load [J]. *Rock and Soil Mechanics* 2008, 26(sup 1) : 163 - 167.)