

# 抛物线型单层柱面网壳的非线性稳定性

贺拥军,周元亮

(湖南大学 土木工程学院,湖南 长沙 410082)

**摘 要:** 对抛物线型单层柱面网壳的静力稳定性能进行了研究. 比较了抛物线型单层柱面网壳与圆柱面单层柱面网壳和倒悬链线单层柱面网壳的静力稳定性能. 对抛物线型单层柱面网壳进行参数分析,并对抛物线型单层柱面网壳进行结构优化. 研究表明:与圆柱面网壳相比,抛物线型单层柱面网壳的极限荷载有大幅度增大,长跨比、矢跨比对网壳的极限荷载影响显著,初始几何缺陷对网壳的极限荷载有较大影响,网壳的斜杆相交角在  $50^\circ$  左右,网壳的静力稳定性能最好,按等比数列布置拱向网格间距,比值  $\alpha$  的取值在 0.85 到 0.95 之间时,网壳的静力稳定性能最好.

**关 键 词:** 单层柱面网壳;圆柱面;抛物线型;倒悬链线;极限荷载

中图分类号: TU 393.3 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2016)07-1050-06

## Nonlinear Buckling of Parabolic Single-Layer Cylindrical Reticulated Shells

HE Yong-jun, ZHOU Yuan-liang

(College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China. Corresponding author: HE Yong-jun, E-mail: hyj0087@163.com)

**Abstract:** Aiming at the static stability of the parabolic single-layer cylindrical reticulated shell, the following research is conducted: the static stability of the parabolic single-layer cylindrical reticulated shell is compared with that of the single-layer cylindrical reticulated shell and the inverted catenary single-layer cylindrical reticulated shell. A large scale parameter analysis is carried out on the parabolic cylindrical reticulated shell. An optimized design for the parabolic single-layer cylindrical reticulated shell is conducted. Research shows that compared with the cylindrical reticulated shell, the ultimate load of the parabolic single-layer reticulated cylindrical shell is greatly enhanced. Rise-span ratio and length-span ratio influence the ultimate load of the shell significantly. The shell is proved to be sensitive to initial geometric imperfection. There exists an optimal oblique rod intersection angle of about  $50^\circ$  under which the static stability is the best. When the grid space layout is arranged according to the geometric series and the value of the ratio  $\alpha$  is between 0.85 and 0.95, the static stability of the shell is the best.

**Key words:** single-layer reticulated cylindrical shell; cylindrical; parabolic; inverted catenary; ultimate load

对于常见的单层圆柱面网壳,其稳定性能的研究已比较成熟完善<sup>[1]</sup>,此类柱面网壳以圆弧线为准线,然而,国内外对其他拱向准线形式的单层柱面网壳结构的研究相对较少.在以往的研究中,许多学者对各种类型的网壳都进行了静力稳定分析,找出了网壳在设计与施工时的主要影响因素,并对此类结构作了大量参数化分析<sup>[2-11]</sup>.贺拥军

等提出了以倒悬链线为准线的单层柱面网壳,并作了大量参数化分析<sup>[12]</sup>;田伟<sup>[13]</sup>对柱面网壳用力密度法进行了找形,并提出了以抛物线为准线的单层柱面网壳,但并未对这种网壳的受力性能作系统的研究.本文以抛物线作为柱面网壳的拱向准线,形成抛物线型单层柱面网壳,运用通用大型有限元软件 ANSYS,深入系统地对比分析了这

种网壳结构的静力稳定性能。

本文首先对三种拱向准线形式单层柱面网壳进行极限稳定承载力分析,这三种拱向准线包括倒悬链线、抛物线、圆弧线,比较得出抛物线型单层柱面网壳的优势和不足。然后从大规模的参数分析入手,研究各种参数对抛物线型单层柱面网壳结构的极限荷载的影响,包括长跨比、矢跨比、杆件截面面积、初始几何缺陷以及荷载不对称分布等。最后,对抛物线型单层柱面网壳在结构上进行优化设计,包括拱向斜杆相交角、拱向网格间距分布等。

# 1 结构分析模型与稳定性能对比

在未经说明的情况下,本文选取如图 1 所示的三向网格形式的单层柱面网壳,沿拱方向,网壳的跨度为  $S = 30\text{ m}$ ,沿拱线等分为 12 份,取 4 种不同的矢跨比:  $f/S = 1/5, 4/15, 1/3, 2/5$ ;在网壳的纵向,选取 4 种不同的长跨比:  $L/S = 1, 1.5, 2, 2.5$ 。网壳结构杆件采用圆钢管,为符合工程实际,其截面尺寸均为工程上常用的截面尺寸  $\phi 180\text{ mm} \times 6\text{ mm}$ 。支座形式选用周边支承:纵向边固定铰支,两端边铰支只限制平面内位移,允许纵向位移。在 ANSYS 的单元选取中,本文采用 beam189 单元,钢材的弹性模量  $E = 2.06 \times 10^5\text{ N/mm}^2$ ,泊松比  $\mu = 0.3$ ,杆件节点采用刚性节点。

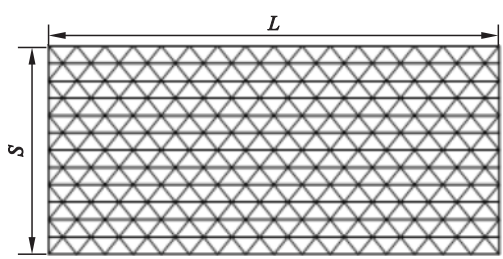


图 1 单层柱面网壳的网格形式  
Fig. 1 Gridding of single-layer cylindrical reticulated shells

本文利用弧长法得出结构的荷载 - 位移曲线,以荷载 - 位移曲线的最高点作为结构的极限荷载。由于柱面网壳的失稳大多是大变形情况下的弹性失稳,故本文分析中仅考虑结构的几何非线性,而忽略结构的材料非线性。对三种拱向准线的单层柱面网壳进行极限稳定承载力的对比分析,通过各自的荷载 - 位移曲线,对比分析结构的极限荷载与刚度的提高情况,其中这三种拱向准线包括:倒悬链线、抛物线、圆弧线。

分析三种不同准线形式的单层柱面网壳在长

跨比  $L/S = 1.5$ ,矢跨比变化时的极限荷载可知:当矢跨比相同时,倒悬链线型网壳和抛物线型网壳的极限荷载相近,都高于圆柱面网壳的极限荷载,且当矢跨比增大时,这一优势也随之增加。

三种不同准线的网壳在长跨比  $L/S = 1.5$ 、矢跨比  $f/S = 1/3$  时的荷载 - 位移曲线如图 2 所示。

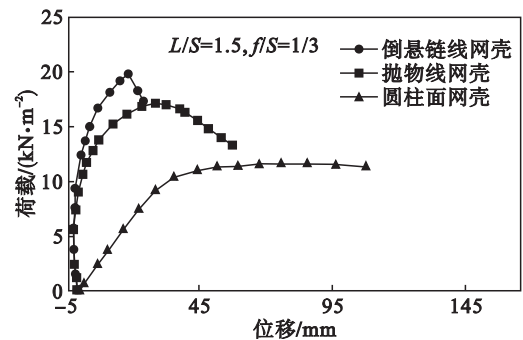


图 2 三种准线形式网壳结构的荷载 - 位移曲线对比  
Fig. 2 Comparison of load-deflection curve between shells of three different alignment forms

由图 2 可以看出,在相同荷载的作用下,倒悬链线网壳和抛物线网壳的位移比圆柱面网壳小很多。由此可见,倒悬链线网壳整体刚度较大,抛物线网壳的整体刚度适中,圆柱面网壳的整体刚度较小,但相对地,圆柱面网壳的延性比另外两种网壳更好。

# 2 屈曲模态

为了解抛物线型单层柱面网壳结构的薄弱部位,得到该结构最先失稳的区域,现对结构进行屈曲模态分析,结果表明,抛物线型单层柱面网壳在竖向均布荷载作用下,可能出现如图 3 所示的一些屈曲模态。由图 3 可以看出:

- 1) 当荷载对称布置时,网壳的屈曲模态有以下两种:当长跨比较小(  $L/S \leq 2$  )时,网壳的屈曲模态呈跨中下凹,两侧向外对称隆起的形式,如图 3a 所示;当长跨比较大(  $L/S \geq 2$  )时,网壳的屈曲模态呈两侧对称下凹,跨中隆起的形式,如图 3b 所示。
- 2) 当荷载不对称布置时,网壳的失稳形式只有一种,承受荷载的一侧向下凹陷,另一侧则稍向外隆起,如图 3c、图 3d 所示。

# 3 几何参数分析

为进一步全面了解抛物线型单层柱面网壳的静力稳定性能,本节从大规模参数入手,分析结构

的长跨比、矢跨比、杆件截面尺寸等因素对结构稳定承载力的影响,为抛物线型单层柱面网壳的应用提供指导和参考依据。

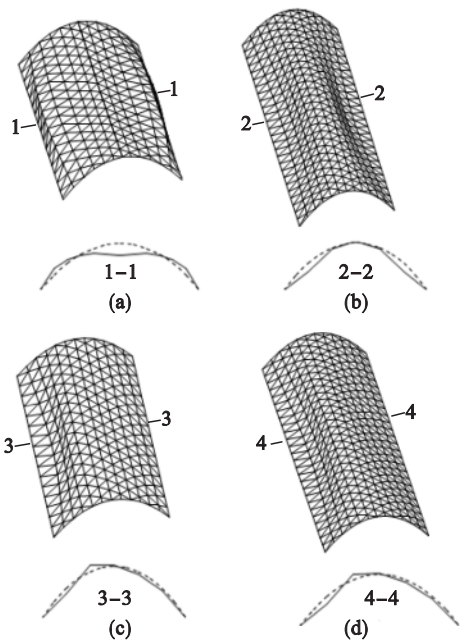


图 3 屈曲模式  
Fig. 3 Buckling modes  
( a )—对称荷载作用下  $L/S\leq 2$  ;  
( b )—对称荷载作用下  $L/S\geq 2$  ;  
( c )—不对称荷载作用下  $L/S\leq 2$  ;  
( d )—不对称荷载作用下  $L/S\geq 2$  .

3. 1 长跨比及矢跨比对极限荷载的影响

随着长跨比  $L/S$  和矢跨比  $f/S$  的变化,抛物线型单层柱面网壳的极限荷载变化如图 4 所示。

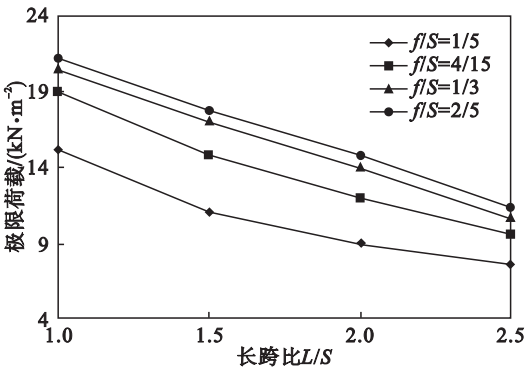


图 4 网壳的极限荷载与长跨比的关系  
Fig. 4 Relationship between ultimate loads and length-span ratio

由图 4 可以看出,在矢跨比不变时,随着网壳长跨比的增加,网壳纵向约束减小,网壳的极限荷载随之呈线性减小。同时可以看出,当长跨比不变时,矢跨比增大,极限荷载随之呈抛物线增大。

3. 2 杆件截面尺寸对极限荷载的影响

为研究杆件截面尺寸对抛物线型单层柱面网壳影响,选取工程上常用的截面尺寸  $\phi 152\text{ mm}\times 6\text{ mm}$ ,  $\phi 168\text{ mm}\times 6\text{ mm}$ ,  $\phi 180\text{ mm}\times 6\text{ mm}$ ,  $\phi 194\text{ mm}\times 6\text{ mm}$ 。并根据拟壳法,采用网壳的等效刚度  $K_e$  来表示网壳杆件截面的大小,其求法详见文献 [14]。采用控制变量法得出网壳的极限荷载随等效刚度的变化规律为:当长跨比和矢跨比不变时,随着等效刚度  $K_e$  的增大,网壳的极限荷载也随之增大,且大致呈线性增长关系。

4 初始几何缺陷对极限荷载的影响

针对网壳初始几何缺陷这一影响,选用长跨比  $L/S=1.5$ ,矢跨比  $f/S=1/5, 4/15, 1/3, 2/5$  的 4 种抛物线型单层柱面网壳,分析其在满跨均布荷载作用下考虑初始几何缺陷时的稳定性能,初始缺陷模态与特征值最低阶屈曲模态相一致。当  $S=3\text{ 000 cm}$  时,缺陷值依次为 0, 3, 3.75, 5, 7.5, 10 cm。为节省篇幅,给出  $L/S=1.5, f/S=1/3$  时,网壳在考虑初始几何缺陷时的荷载-位移曲线如图 5 所示,其余 3 种矢跨比的网壳具有与图 5 相似的规律。这 4 种情况下网壳的极限荷载与初始几何缺陷的关系曲线如图 6 所示。

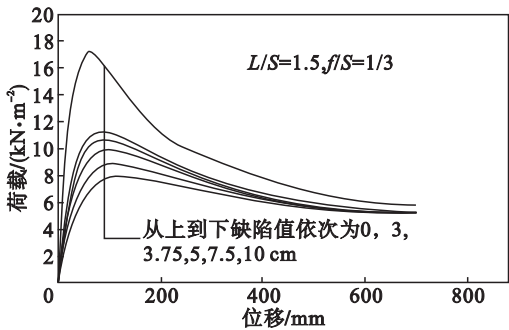


图 5 不同初始几何缺陷的荷载-位移曲线  
Fig. 5 Load-deflection curves with different initial imperfections

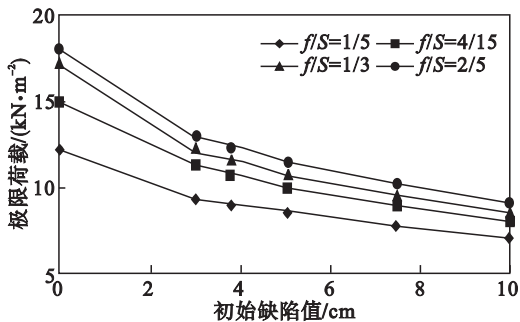


图 6 极限荷载与初始几何缺陷的关系曲线  
Fig. 6 Relationship between ultimate loads and initial imperfections

由图 5 和图 6 可以看出,对不同矢跨比的网壳,其极限荷载随初始几何缺陷的变化趋势是一致的,在初始几何缺陷很小( $r \leq S/1\,000$ )时,网壳的极限荷载急剧减小,随着初始几何缺陷的增加,极限荷载减小的趋势逐渐趋于平缓.初始缺陷对网壳的静力稳定性能影响较大,所以控制网壳的初始几何缺陷,抛物线型网壳的线型优势才能得到充分发挥.

5 荷载不对称对极限荷载的影响

针对网壳荷载不对称这一影响因素,采用矢跨比为 1/3,而长跨比变化的 4 种抛物线型单层柱面网壳结构,分析其在考虑不对称荷载时的稳定性能.不对称荷载的作用形式为活荷载半跨布置,活荷载  $p$  与恒荷载  $g$  的比值依次取  $p/g = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.00$ ,不考虑结构初始几何缺陷,网壳的极限荷载如图 7 所示.

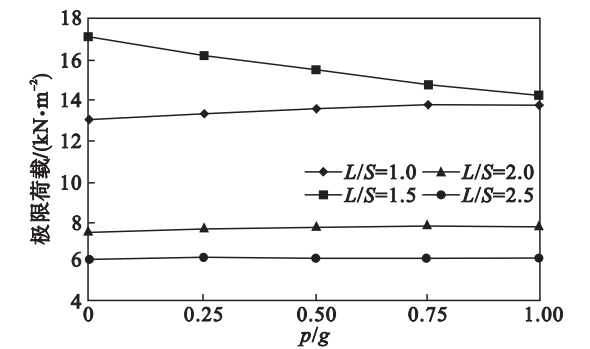


图 7 不同比例不对称荷载作用下的极限荷载  
Fig. 7 Ultimate loads of shells under unsymmetrical distributed loads

从图 7 可以看出,随着活荷载与恒荷载比值  $p/g$  的增大,网壳的极限荷载变化不大,在网壳的长跨比  $L/S = 1.5$  时,极限荷载减小幅度最大为 17.1%.说明结构对不对称荷载不敏感.

6 极限承载力公式拟合

由前面的参数分析可知,长跨比、矢跨比、截面面积和初始几何缺陷是影响结构极限荷载的主要因素,且有如下规律:长跨比与极限荷载呈线性关系,矢跨比与极限荷载呈抛物线关系;用截面的等效刚度来表示杆件截面大小时,杆件截面等效刚度与极限荷载呈线性关系;结构极限荷载对初始几何缺陷非常敏感,可在完善结构拟合公式基础上乘以某一系数进行修正.荷载不对称对结构

的极限荷载影响则十分有限,拟合公式时可以忽略.

根据以上参数与极限荷载之间的关系,首先构造拟合公式的形式,然后再由分析数据通过最小二乘法得到公式中的系数.最终得到完善结构极限荷载的拟合公式如下:

$$q_{cr} = [2.59 \left(\frac{f}{S}\right)^2 - 1.31 \left(\frac{f}{S}\right) - 0.06] \left(\frac{L}{S} - 1\right) + 327.6 \left(\frac{f}{S}\right)^3 - 476.1 \left(\frac{f}{S}\right)^2 + 224.2 \left(\frac{f}{S}\right) - 13.16 \} \times \sqrt{K_e} / (0.08 \sqrt{K_e} + 16.41).$$

为验证此公式的精确性,将此拟合公式计算所得结果同利用 ANSYS 程序计算分析结果进行对比,两者对比结果如表 1 所示,其中定义误差为

$$E = \frac{q_{cr(\text{程序})} - q_{cr(\text{公式})}}{q_{cr(\text{程序})}}.$$

表 1 拟合公式与 ANSYS 程序计算结果对比  
( $\Phi 180\text{ mm} \times 6\text{ mm}$ )  
Table 1 Comparison between the results by the fitting formula and those by ANSYS software  
( $\Phi 180\text{ mm} \times 6\text{ mm}$ )

$L/S$	计算结果	$f/S$			
		1/5	4/15	1/3	2/5
1	$q_{cr(\text{程序})}/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-2})$	15.26	18.98	20.81	21.32
	$q_{cr(\text{公式})}/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-2})$	14.82	18.54	20.37	20.87
	$E/\%$	2.90	2.34	2.14	2.10
1.5	$q_{cr(\text{程序})}/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-2})$	11	14.90	17.20	17.90
	$q_{cr(\text{公式})}/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-2})$	11.58	15.22	17.29	18.40
	$E/\%$	-5.27	-2.15	-0.52	-2.79
2	$q_{cr(\text{程序})}/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-2})$	9.07	12.01	14.01	15.01
	$q_{cr(\text{公式})}/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-2})$	8.38	11.9	14.22	15.92
	$E/\%$	7.60	0.91	-0.96	-6.10
2.5	$q_{cr(\text{程序})}/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-2})$	7.65	9.56	10.85	11.49
	$q_{cr(\text{公式})}/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-2})$	7.50	9.58	11.15	12.45
	$E/\%$	1.91	-0.24	-2.74	-8.35

从表 1 可以看出,按公式计算的结果相比按程序计算的结果,其误差几乎都控制在 9% 范围内,所以公式计算抛物线单层型网壳的极限荷载是可以接受的.

根据《空间网格技术规程》<sup>[12]</sup> 4.3.3 节规定,单层网壳初始几何缺陷最大值可按网壳跨度的 1/300 取值.再根据第 4 节分析数据,对具有  $S/300$  初始几何缺陷的抛物线型单层网壳的极限荷载降低系数进行统计,得到其平均值和标准差分别为 0.53 和 0.039,按照结构可靠度要求(95% 的保证率),极限荷载降低系数可取 0.47.



7 网壳结构的优化设计

网壳结构的优化有增加拱向立体桁架、改变杆件的布置方式等. 本节主要从改变杆件的布置方式入手, 探究拱向斜杆相交角和拱向网格间距分布的优化.

7.1 拱向斜杆相交角优化

对于三向网格形式的抛物线型单层柱面网壳, 结构中的荷载主要由拱向的斜杆传递和承担, 斜杆间的相交角对网壳的极限荷载影响显著. 本节选取长跨比  $L/S=1.5$ , 而矢跨比不同的 4 种抛物线型单层柱面网壳, 研究其在改变拱向斜杆角  $\beta$  的情况下, 极限荷载的变化趋势. 为便于研究斜杆相交角  $\beta$  对网壳极限荷载的影响, 现用网格纵向杆件的长度  $l$  表征  $\beta$  的变化,  $l$  与  $\beta$  的关系如图 8 所示. 网壳的极限荷载随  $l$  的变化情况如图 9 所示. 由于杆件布置形式不同而引起网壳用钢量  $T$  发生变化, 故采用极限荷载  $q_{cr}$  与用钢量  $T$  的比值  $q_{cr}/T$  表示极限荷载的变化情况.

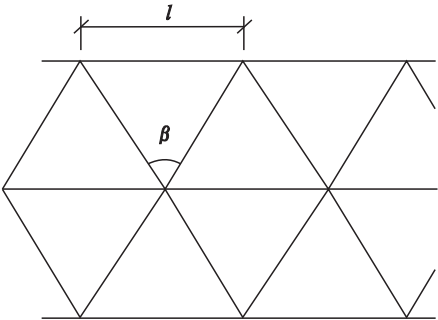


图 8 斜杆相交角  $\beta$  与网格纵向杆件的长度  $l$  的关系  
Fig. 8 The relationship between the intersection angle  $\beta$  of the oblique rods and the length  $l$  of the longitudinal rod

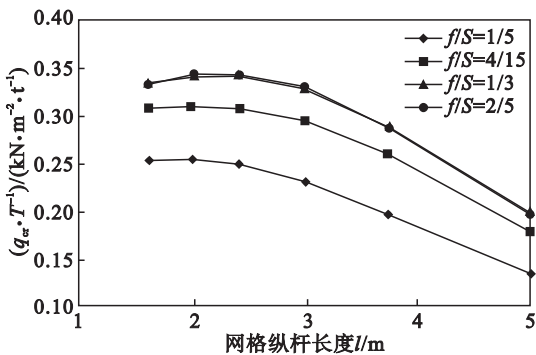


图 9 网壳极限荷载与网格纵杆长度的关系曲线  
Fig. 9 The relationship between the ultimate loads of shells and the lengths of the longitudinal rods

从图 9 可以看出, 对于矢跨比相同的网壳, 随着网格纵杆长度  $l$  的增大, 网壳的极限荷载先增

大再减小. 这意味着网壳中斜杆相交角存在最优值. 这个最优值可以通过网壳极限荷载取得极大值时斜杆相交角  $\beta$  与网格纵向杆件的长度  $l$  的关系(图 8)得出. 通过计算, 不同矢跨比的拱向斜杆相交角的最优值如表 2 所示.

表 2 不同矢跨比时网壳的拱向斜杆间的最优角  
Table 2 The optimal oblique rod intersection angle of shells with different raise-span ratio

矢跨比	1/5	4/15	1/3	2/5
斜杆间最优角/( $^{\circ}$ )	47.2	51.2	51.1	48.4

从表 2 可以看出, 抛物线型单层柱面网壳的拱向斜杆间的最优角在  $50^{\circ}$  左右.

7.2 拱向网格间距分布优化

在传统的网壳中, 杆件的长度采取等分拱线的分隔形式, 使得每一根拱向杆件的长度相等. 本节采用拱向网格间距从边缘到跨中按等比数列分布的形式, 研究在这种分隔形式下网壳的稳定承载力. 所采用等比数列的比值有 7 种:  $\alpha=0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1, 1.05, 1.1$ . 网格间距分布形式如图 10 所示.

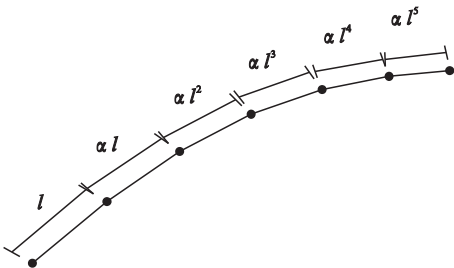


图 10 拱向网格间距分布形式  
Fig. 10 Grid space layout along arch direction

对长跨比  $L/S=1.5$ , 而矢跨比不同的 4 种网壳进行极限承载能力分析. 结果表明, 在长跨比和矢跨比不变时, 随着等比数列比值  $\alpha$  的增大, 网壳的屈曲模态由图 3a 所示的横截面形式逐渐转化为图 3b 所示的形式. 网壳的极限荷载随比值  $\alpha$  的变化如图 11 所示.

从图 10 和图 11 可以看出, 对于相同矢跨比的网壳, 随着比值  $\alpha$  的增大, 网壳的屈曲模态逐渐发生变化. 相应地, 网壳的极限荷载先增大后减小. 这说明, 网壳的拱向网格间距分布存在最优的分布形式, 使得网壳的极限荷载达到极大值. 当矢跨比较小时, 此极大值在比值  $\alpha$  较大处取得; 当矢跨比较大时, 此极大值在比值  $\alpha$  较小处取得. 随着矢跨比的变化, 比值  $\alpha$  的最优取值在 0.85 到 0.95 之间.

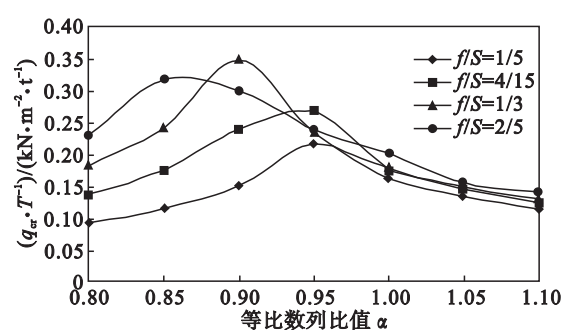


图 11 极限荷载与拱向网格间距分布的关系曲线  
Fig. 11 Relationship between ultimate loads and the grid space layouts along arch direction

# 8 结 论

1) 抛物线型单层柱面网壳和倒悬链线单层柱面网壳的静力稳定性性能相近,与传统圆柱面网壳相比,极限荷载均有大幅提高,且二者的刚度比传统圆柱面网壳有所增大。

2) 抛物线型单层柱面网壳结构存在最优的斜杆相交角,使得其静力稳定性性能最好,这个最优角在 50°左右。

3) 抛物线型单层柱面网壳结构存在最优的拱向网格间距分布形式,使得网壳的静力稳定性性能最好,最优的网格间距分布形式与网壳的矢跨比有关。按等比数列布置拱向网格间距时,比值  $\alpha$  的最优取值在 0.85 到 0.95 之间。

## 参考文献：

[ 1 ] Bradshaw R , Campbell D , Gargari M , et al. Special structures past present and future[ J ]. *Journal of Structural Engineering and Mechanics* 2002 ,128( 6 ) :691 – 709.

[ 2 ] Altuna Z M , Lopez-Arancibia A , Puente I. Influence of geometrical and structural parameters on the behavior of squared planform single-layer structures[ J ]. *Journal of Constructional Steel Research* 2012 ,72( 8 ) :219 – 226.

[ 3 ] Kato S , Yamashita T , Nakazawa S , et al. Analysis based evaluation for buckling loads of two-way elliptic paraboloidal single layer lattice domes[ J ]. *Journal of Constructional Steel Research* 2007 ,63( 9 ) :1219 – 1227.

[ 4 ] He Y J , Zhou X H. Static properties and stability of cylindrical ILTDBS reticulated mega-structure with double-layer grid substructures[ J ]. *Journal of Constructional Steel Research* 2007 ,63( 12 ) :1580 – 1589.

[ 5 ] Fan F , Yan J C , Cao Z G. Stability of reticulated shells considering member buckling[ J ]. *Journal of Constructional Steel Research* 2012 ,77( 1 ) :32 – 42

[ 6 ] Kitipornchai S , Kang W J , Lam H F , et al. Factors affecting the design and construction of Lamella suspen-dome systems [ J ]. *Journal of Constructional Steel Research* 2005 ,61( 6 ) :764 – 785.

[ 7 ] Kato S , Fujimoto M , Ogawa T. Buckling load of steel single-layer reticulated domes of circular plan[ J ]. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* , 2005 ,46( 1 ) :41 – 63.

[ 8 ] Gantes J. Design strategies for controlling structural instabilities[ J ]. *Journal of Space Structures* 2000 ,13( 34 ) :167 – 188.

[ 9 ] Bletzinger K U , Ramm E. Structural optimization and form finding of lightweight structures[ J ]. *Journal of Computers & Structures* 2001 ,79( 1 ) :2053 – 2062.

[ 10 ] El-Sheikh A I. Effect of geometric imperfections on single-layer barrel vaults [ J ]. *International Journal of Space Structures* 2002 ,17( 4 ) :271 – 283.

[ 11 ] 沈世钊 陈昕. 网壳结构稳定性[ M ]. 北京 :科学出版社 , 1999.

( Shen Shi-zhao , Chen Xin. Stability of single-layer lattice vaults[ M ]. Beijing :Science Press ,1999. )

[ 12 ] 贺拥军 刘旦 周绪红. 单层倒悬链型柱面网壳的非线性稳定性研究 [ J ]. 湖南大学学报( 自然科学版 ) 2012 ,39( 6 ) :1 – 6.

( He Yong-jun , Liu Dan , Zhou Xu-hong. Nonlinear buckling of inverted catenary single-layer cylindrical reticulated shells [ J ]. *Journal of Hunan University( Natural Sciences )* 2012 , 39( 6 ) :1 – 6. )

[ 13 ] 田伟. 刚性单层网壳结构找形与稳定研究 [ D ]. 杭州 :浙江大学 2011.

( Tian Wei. Form-finding and stability research of rigid single-layer lattice shells [ D ]. Hangzhou : Zhejiang University 2011. )

[ 14 ] 中华人民共和国建设部. 空间网格结构技术规程 :JGJ7—2010[ S ]. 北京 :中国建筑工业出版社 2010.

( Ministry of Development of the People’s Republic of China. Technical specification for space frame structures :JGJ7—2010[ S ]. Beijing :China Architecture and Building Press , 2010. )