

# 具有弹性支承输流管路的流体诱发振动分析

赵千里,孙志礼,柴小冬,佟操

( 东北大学 机械工程与自动化学院,辽宁 沈阳 110819 )

**摘 要:** 利用微分变换法分析具有弹性支承的悬臂式输流管路的流体诱发振动问题. 首先对振动微分方程无量纲化,其次采用微分变换法获得各阶微分的递推关系,进而求解得到不计流速时的前四阶固有频率及振型函数的通用表达式.在此基础上,计算并得到了计及流速时固有频率随流速和弹性系数的变化,同时研究了不同弹性系数及质量比下的临界流速及稳定性.通过对比和分析,证实了微分变换法具有较高的精度和实用性.微分变换法可作为设计管路支承形式的参考.

**关 键 词:** 输流管路;流固耦合振动;微分变换法;弹性支承;稳定性

中图分类号: O 353      文献标志码: A      文章编号: 1005-3026(2016)08-1122-05

## Analysis of Flow-induced Vibration of Fluid Conveying Pipe with Elastic Support

ZHAO Qian-li, SUN Zhi-li, CHAI Xiao-dong, TONG Cao

( School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: ZHAO Qian-li, E-mail: zql20081841@163.com )

**Abstract :** The flow-induced vibration of cantilevered fluid-conveying pipes with elastic support was analyzed by differential transformation method ( DTM ). Firstly, the motion equation was non-dimensionalized, then, the recurrence relation among each derivative was derived by DTM. Furthermore, the former four dimensionless frequencies and the general expression for mode shapes were obtained without consideration of fluid flow. On this basis, the relationship between frequency and flow velocity, elastic coefficient was worked out, and the critical velocity and stability condition were investigated simultaneously. DTM was verified to be of high accuracy and practicability by comparison and analysis. Besides, DTM could be referred when support format for pipes are designed.

**Key words :** fluid conveying pipe; fluid-structure interaction vibration; differential transformation method; elastic support; stability

输流管路在世界上的应用范围之广,历史之久使得与其相关的流固耦合振动问题在近百年来吸引了大量的科研工作者并发表了大量研究成果<sup>[1-3]</sup>.具有弹性支承的悬臂式管路可作为许多实际应用场合(如车辆内部大部分管路系统)的近似模型,对这类模型的振动特性进行分析可以帮助设计人员把握服役车辆管路系统的动态特性,进而寻求方法从根本上降低跑冒滴漏以及断裂等问题发生的可能性,从而大大提高系统的可

靠性.关于这类输流管路振动问题的相关研究成果包括:赵凤群等<sup>[4]</sup>采用有限差分法(FDM)分析了具有移动弹性支承的稳定性问题;倪樵等<sup>[5]</sup>采用微分求积法(DQM)分析了自由端具有弹性支承的临界流速问题;包日东等<sup>[6]</sup>采用微分求积法分析了自由端具有弹性支承的稳定性问题等.微分变换法(DTM)由赵家奎<sup>[7]</sup>于1986年首次提出,用以解决电路中的问题,其核心是泰勒展开式,将原函数的各阶微分转化为变换函数的递推

关系,避免了微积分的出现,从而大大提高计算效率.

本文将 DTM 推广应用于求解具有弹性支承输流管路的流体诱发振动问题. 通过对比分析,证实了 DTM 数值解具有较高的精度和适应性. 微分变换法的计算结果可作为设计管路支承形式的参考.

## 1 管路的力学模型及振动微分方程

本文研究的管路为水平放置的均匀细长管路,仅考虑微幅振动,忽略非线性项及与轴向振动耦合的项,力学模型如图 1 所示,其横向自由振动微分方程根据文献 [3] 可表示为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

式中:  $EI$  为弯曲刚度,  $\text{N} \cdot \text{m}^2$ ;  $M$  和  $m$  分别为单位长度流体和管路的质量,  $\text{kg/m}$ ;  $U$  为流体的定常流速,  $\text{m/s}$ ;  $w(x, t)$  为管路的横向挠度,  $\text{m}$ ;  $x$  为水平坐标,  $\text{m}$ ;  $t$  为时间坐标,  $\text{s}$ .

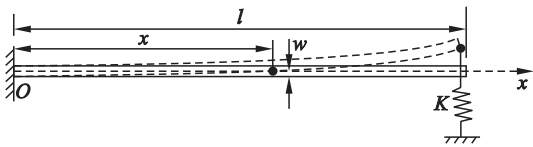


图 1 具有弹性支承细长管路的力学模型  
Fig. 1 Mechanical model of slender pipe with elastic support

将式 (1) 无量纲化,可表示为

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + u^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2u \sqrt{\beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0. \quad (2)$$

其中,无量纲参数分别为

$$\eta = \frac{w}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \mu = \left( \frac{M}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} l U, \quad \beta = \frac{M}{M + m},$$
$$\tau = \left( \frac{EI}{M + m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{l^2}, \quad \omega = \left( \frac{M + m}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} l^2 \Omega, \quad k = \frac{l^3}{EI} K. \quad (3)$$

式中:  $K$  为自由端弹簧的弹性系数,  $\text{N/m}$ .

对于式 (2),其理论解可以表示为

$$\eta(\xi, \tau) = \chi(\xi) e^{i\omega\tau}. \quad (4)$$

式中  $\xi \in [0, 1]$ .

将式 (4) 代入式 (2),得

$$\frac{d^4 \chi}{d\xi^4} + u^2 \frac{d^2 \chi}{d\xi^2} + 2u\omega \sqrt{\beta} \frac{d\chi}{d\xi} i - \omega^2 \chi = 0. \quad (5)$$

求解振动问题转化为求解如式 (5) 所示的线性齐次微分方程. 以下的研究如无特殊说明均采用无量纲参量.

## 2 微分变换法的原理及应用

### 2.1 微分变换原理

微分变换法的基础是泰勒展开式,对于连续可微的原函数  $\chi(\xi)$ ,其  $n$  阶微分变换式为

$$\chi(n) = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n \chi(\xi)}{d\xi^n} \right]_{\xi=0}. \quad (6)$$

$n$  阶微分的逆变换为

$$\chi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \chi(n). \quad (7)$$

将式 (6) 代入到式 (7) 中,可得

$$\chi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left[ \frac{d^n \chi(\xi)}{d\xi^n} \right]_{\xi=0}. \quad (8)$$

式 (8) 即为原函数  $\chi(\xi)$  在坐标原点的泰勒展开式. 在数值计算中,为了提高效率,在满足精度及收敛性的要求下,可以仅用前  $N$  项来近似精确

解,即  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \xi^n \chi(n) \approx 0$ ,  $N$  可以被定义为微分阶数,此时,原函数可表示为

$$\chi(\xi) = \sum_{n=0}^N \xi^n \chi(n). \quad (9)$$

### 2.2 微分变换法在本文的应用

对于原函数之间的基本关系,可利用式 (6) 得到其  $n$  阶微分变换之间的关系,本文主要应用了表 1 中的三项基本对应关系.

表 1 基本函数与其  $n$  阶微分变换的对应关系  
Table 1 Correspondence of basic functions and  $n$ -th order differential transforms

原函数	微分变换函数
$\chi(\xi) = \chi(\xi) \pm \chi(\xi)$	$\chi(n) = \chi(n) \pm \chi(n)$
$\chi(\xi) = \lambda \chi(\xi)$ , $\lambda$ 为常数	$\chi(n) = \lambda \chi(n)$
$\chi(\xi) = \frac{d^k \chi(\xi)}{d\xi^k}$ , $k$ 为常数	$\chi(n) = (n+1) \chi(n+2) \dots (n+k) \chi(n+k)$

为便于区分,下文中以大写字母标示微分变换函数,以小写字母标示原函数. 利用表 1,将各阶微分相应的变换关系代入式 (5),可得

$$\chi(n+4) = - \frac{u^2 \chi(n+2)}{(n+3) \chi(n+4)} - \frac{2u\omega \sqrt{\beta} \chi(n+1)}{(n+2) \chi(n+3) \chi(n+4)} i + \frac{\omega^2 \chi(n)}{(n+1) \chi(n+2) \chi(n+3) \chi(n+4)},$$
$$n = 0, 1, 2, \dots. \quad (10)$$

对于自由端具有弹性支承的悬臂式细长管路,其无量纲边界条件可表示为

$$\eta(0, \tau) = \eta'(0, \tau) = \eta''(1, \tau) = 0,$$

$\eta'''(1-\sigma)=k\eta(1-\sigma).$

推导出：

$$\begin{aligned} y(0) &= y'(0) = y''(1) = 0, \\ y'''(1) &= k y(1). \end{aligned} \tag{11}$$

式中  $k$  为式 (3) 所定义的无量纲弹性系数,角分号表示对横坐标求导.

利用式 (6) 和式 (9) 可得到与式 (11) 对应的微分变换式为

$$Y(0) = Y(1) = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^N n(n-1)Y(n) = 0, \tag{13}$$

$$\sum_{n=0}^N [k - n(n-1)(n-2)]Y(n) = 0. \tag{14}$$

1) 当  $u = 0$  时,结合式 (10) 和式 (12),可得到各阶微分变换式之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} Y(4m) &= 0, \\ Y(4m+1) &= 0, \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

$$\left. \begin{aligned} Y(4m+2) &= \frac{2!}{(4m+2)!} \omega^{2m} Y(2), \\ Y(4m+3) &= \frac{3!}{(4m+3)!} \omega^{2m} Y(3), \\ m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

由式 (16) 可知,各阶微分变换式均为  $Y(2)$  或  $Y(3)$  的倍数.结合式 (15),式 (13) 和式 (14) 在此类情况下的展开式即为

$$\left. \begin{aligned} &2 \times 1 \times Y(2) + 3 \times 2 \times Y(3) + 6 \times 5 \times Y(6) + \\ &7 \times 6 \times Y(7) + \dots + N(N-1)Y(N) = 0, \\ &(k - 2 \times 1 \times 0)Y(2) + (k - 3 \times 2 \times 1)Y(3) + \\ &\dots + [k - N(N-1)(N-2)]Y(N) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

因  $N$  的取值不同,会导致式 (17) 中末尾几项取舍的不同;以  $N$  为 4 的整数倍为例(其余情况经验证,所得结果与此一致),结合式 (16),式 (17) 可以表示为

$$\begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) \\ A_{21}(k,\omega) & A_{22}(k,\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(2) \\ Y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

式中  $A_{ij} (i, j = 1, 2)$  均为包含无量纲固有频率  $\omega$  的系数,具体形式为

$$A_{11} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \frac{\omega^{2n}}{(4n)!} A_{12} = 3 \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \frac{\omega^{2n}}{(4n+1)!},$$

$$A_{21} = \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{4}-1} \left[ \frac{k}{(4n+2)!} - \frac{1}{(4n-1)!} \right] \omega^{2n},$$

$$A_{22} = 3 \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left[ \frac{k}{(4n+3)!} - \frac{1}{(4n)!} \right] \omega^{2n}.$$

$Y(2)$  和  $Y(3)$  不得为零,否则原函数为零.因此,式 (18) 中的系数矩阵行列式必须为 0,由此可得到  $\omega$  和微分阶数  $N$  的关系.  $N$  足够大时,得到的固有频率数值解具有足够的精度.经过验证,当  $N \geq 40$  时,前四阶固有频率即可十分接近精确解,如图 2 所示.

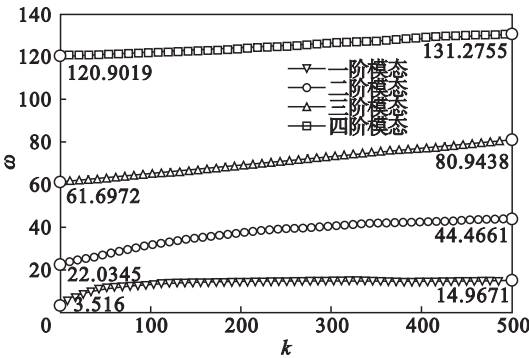


图 2 弹性系数与前四阶固有频率的关系 ( $N = 40$ )  
Fig. 2 Relationship between elastic coefficient and the first four orders of natural frequencies ( $N = 40$ )

悬臂式欧拉-伯努利梁的前四阶固有频率的理论解由文献[8]可知,分别为  $\omega_1 = 3.5160$ ,  $\omega_2 = 22.0345$ ,  $\omega_3 = 61.6972$ ,  $\omega_4 = 120.9019$ ,与图 2 中  $k = 0$  时的结果相同,且到了小数点后四位仍未出现误差,说明 DTM 方法具有较高的准确性.随着  $k$  的增加,整体刚度有所提升,因此,导致图 2 中各阶频率均有所增加.

将固有频率达到收敛时的微分阶数  $N$  以及相应的固有频率代入式 (18) 中,可得  $Y(2)$  与  $Y(3)$  的关系.根据式 (9),无量纲振型函数可以表示为

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j(\xi) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \frac{\omega_j^{2n}}{(4n+2)!} \xi^{4n+2} - \\ &\frac{\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \frac{\omega_j^{2n}}{(4n)!}}{\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \frac{\omega_j^{2n}}{(4n+1)!}} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \frac{\omega_j^{2n}}{(4n+3)!} \xi^{4n+3}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{19}$$

式中  $\omega_j$  为管路的第  $j$  阶固有频率.

2) 当  $u \neq 0$  时,依据式 (10),可得各项微分变换式的关系为

$$Y(4) = -\frac{u^2}{3 \times 4} Y(2);$$

$$Y(5) = -\frac{2u\omega\sqrt{\beta}}{3 \times 4 \times 5} Y(2) - \frac{u^2}{4 \times 5} Y(3);$$

$$\begin{aligned} X(6) &= \frac{u^4 + \omega^2}{3 \times 4 \times 5 \times 6} X(2) - \frac{2u\omega\sqrt{\beta}}{4 \times 5 \times 6} X(3) i; \\ X(N) &= C_{N1}(u, \omega, \beta) X(2) + C_{N2}(u, \omega, \beta) X(3). \end{aligned} \tag{20}$$

式中,  $C_{N1}$  和  $C_{N2}$  为复系数.

将式 (20) 代入式 (13) 和式 (14), 依然会得到形如式 (18) 的表达式, 只是系数矩阵各元素为虚数, 即

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_{11}i & A_{12} + B_{12}i \\ A_{21} + B_{21}i & A_{22} + B_{22}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

式中  $A_{ij}, B_{ij} (i, j = 1, 2)$  均为实系数.

令式 (21) 的系数矩阵行列式为 0, 得到的固有频率必然包含实部和虚部两部分, 实部解是管

路自由振动的无量纲固有频率, 虚部解与流动引起的阻尼有关, 且阻尼  $\zeta = \text{Im}(\omega) / \text{Re}(\omega)$ .

对其余支承形式的输流管路来讲, 只需调整边界条件, 即式 (11), 便可通过化简得到形如式 (21) 的表达式, 进而能计算得到管路的自由振动特性.

### 3 计算结果及稳定性分析

已有研究证明, 对管路系统影响较大的是前几阶固有频率, 因此, 选取前四阶作为研究对象. 假设  $\beta = 0.5$ , 图 3 为弹性系数分别取 0, 100, 1 000 和 10 000 时管路的前四阶实部固有频率随流速的变化曲线.

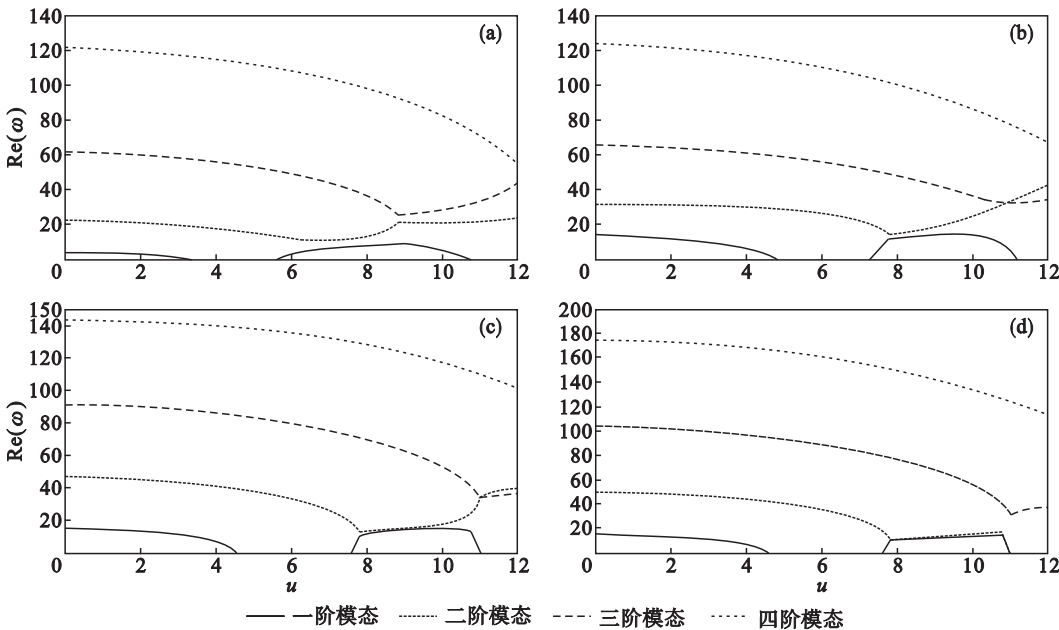


图 3 前四阶实部固有频率与流速及弹性系数的关系 ( $\beta = 0.5$ )

Fig. 3 Relationship among the first four orders of real natural frequencies, velocities and elastic coefficient ( $\beta = 0.5$ )

(a) —  $k = 0$ ; (b) —  $k = 100$ ; (c) —  $k = 1\,000$ ; (d) —  $k = 10\,000$ .

图 3a 为悬臂式输流管路的固有频率随流速的变化曲线, 与文献 [8] 的结果一致. 如图 3 所示, 当  $\beta = 0.5$  时, 自由端弹簧的存在对管路的固有频率产生影响, 进而可以影响到管路的失稳模式 (结论对  $\beta$  取其余值时依然成立). 由图 3d 可知, 当  $\beta = 0.5, k = 10^4$  时, 管路的一、二阶实部固有频率在流速约为 7.8 时结合, 发生耦合模态颤振, 此时管路可近似视为一端固定、另一端简支式.

为进一步验证 DTM 的正确性与准确性, 现与其他方法的计算结果进行对比, 作以下计算:

①当  $k = 0, \beta = 0.2$  时, 颤振临界流速  $u_{cf}$  的

DTM 解为 5.591 5, 与文献 [3] 的理论解 5.60 基本一致;

②当  $\beta$  取任意值  $k = 50$  和 100 时, 发散区间分别约为  $[5.040\,2, 6.640\,6]$  和  $[4.728\,8, 7.177\,0]$ , 结果与文献 [4] 的结果  $[5.039\,6, 6.638]$  和  $[4.723\,7, 7.175]$  基本一致;

③当  $k = 10\,000$  时, 由 DTM 计算得到  $\beta = 0.2$  时的发散临界流速  $u_{cd}$  为 4.495, 比伽辽金方法<sup>[9]</sup> 的解 4.499 更加接近理论解 4.490, 同时能得到  $u_{cf}$  的极限值为 7.396.

由 DTM 计算得到的临界流速  $u_c$  随质量比  $\beta$  和弹性系数  $k$  的变化曲线如图 4 所示.

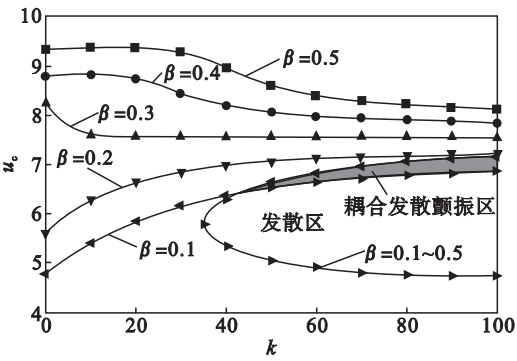


图 4 质量比和弹性系数对临界流速的影响  
Fig. 4 Influence of mass ratio and elastic coefficient on critical velocity

在图 4 中,阴影部分为发散和颤振同时存在的区域.由图可知,当弹性系数达到临界值  $k_c$ ,约为 34.815 时,发散区间缩减为单个点,  $u_{cd}$  约为 5.765,在  $k > 34.815$  后才会产生发散区域;随  $\beta$  的增加,发散临界流速  $u_{cd}$  不受影响,而颤振临界流速  $u_{cf}$  增加;对于任意  $\beta$ ,当  $k$  较大时,  $u_{cf}$  的变化趋于平缓,而  $u_{cd}$  变化较明显,存在发散先于颤振的可能; $\beta = 0.3$  时,  $u_{cf}$  对  $k$  ( $k > 20$ ) 的变化不敏感.以上结果说明,由于自由端弹性支承的存在,管路有可能出现发散、发散颤振耦合失稳,以及耦合模态颤振等复杂的失稳模式.

4 结 论

- 1) 由微分变换法计算得到的输流管路自由振动固有频率和临界流速数值解具有较好精度.
- 2) 仅需调整边界条件,微分变换法便可用来计算其余支承形式输流管路的自由振动特性,方法具有较好的适用性.
- 3) 微分变换法可为后续有关提高输流管路系统的稳定性和可靠性的研究提供精确的计算结果.

参考文献:

[ 1 ] Paidoussis M P. Fluid-structure interactions :slender structures and axial flow vol. I[ M ]. London :Academic Press ,1998.

[ 2 ] Paidoussis M P ,Li G X. Pipes conveying fluid :a model dynamical problem[ J ]. *Journal of Fluids and Structure* , 1993 ,7( 2 ) :137 - 204.

[ 3 ] Paidoussis M P. The canonical problem of the fluid conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics[ J ]. *Journal of Sound and Vibration* 2008 ,310( 3 ) :462 - 492.

[ 4 ] 赵凤群,王忠民.具有可移动弹性支承输流管道的稳定性分析[ J ].*机械工程学报* 2004 ,40( 9 ) :38 - 41.  
( Zhao Feng-qun ,Wang Zhong-min. Stability analysis of pipes conveying fluid with removable elastic support[ J ]. *Journal of Mechanical Engineering* 2004 ,40( 9 ) :38 - 41. )

[ 5 ] 倪樵,黄玉盈,陈贻平.微分求积法分析具有弹性支承输流管的临界流速[ J ].*计算力学学报* 2000 ,18( 2 ) :146 - 149.  
( Ni Qiao ,Huang Yu-ying ,Chen Yi-ping. Analysis of critical velocity of fluid conveying pipes by differential quadrature method[ J ]. *Chinese Journal of Computational Mechanics* , 2000 ,18( 2 ) :146 - 149. )

[ 6 ] 包日东,闻邦椿.微分求积法分析弹性支承输流管道的稳定性[ J ].*东北大学学报( 自然科学版 )* ,2007 ,28( 7 ) :1017 - 1020.  
( Bao Ri-dong ,Wen Bang-chun. Differential quadrature method to analyze stability of elastically supported fluid conveying pipelines[ J ]. *Journal of Northeastern University ( Natural Science )* 2007 ,28( 7 ) :1017 - 1020. )

[ 7 ] 赵家奎.微分变换及其在电路中的应用[ M ].武汉:华中工学院出版社,1986.  
( Zhao Jia-kui. Differential transformation and its application for electrical circuits[ M ]. Wuhan :Huazhong College of Technology Press ,1986. )

[ 8 ] Ni Q ,Zhang Z L ,Wang L. Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid[ J ]. *Applied Mathematics and Computation* , 2011 ,217( 16 ) :7028 - 7038.

[ 9 ] 金基铎,杨晓东,邹光胜.两端支承输流管道的稳定性和临界流速分析[ J ].*机械工程学报* 2006 ,42( 11 ) :131 - 136.  
( Jin Ji-duo ,Yang Xiao-dong ,Zou Guang-sheng. Stability and critical flow velocity of supported pipes conveying fluid[ J ]. *Journal of Mechanical Engineering* , 2006 , 42 ( 11 ) : 131 - 136. )