

doi : 10.3969/j.issn.1005-3026.2016.08.018

# 线接触端曲面齿轮齿面的接触算法

林 超,顾思家

( 重庆大学 机械传动国家重点实验室,重庆 400044 )

**摘 要:** 为了研究线接触端曲面齿轮副的齿面接触特性,建立了端曲面齿轮副的传动坐标系,推导出齿轮副的瞬时回转轴及瞬轴面.应用齿廓啮合基本定理,从几何学的角度提出了线接触端曲面齿轮副齿面接触算法,求解出齿轮副的齿面接触印痕与齿廓点.根据齿轮副齿面接触分析结果,确定了端曲面齿轮齿面的修形位置.通过齿轮副对滚实验,验证了线接触端曲面齿轮齿面接触算法的正确性.

**关 键 词:** 端曲面齿轮;齿面接触;瞬轴面;变传动比;线接触

中图分类号: TH 132.429      文献标志码: A      文章编号: 1005-3026(2016)08-1149-06

## Tooth Contact Algorithm of Line Contact Curve-Face Gear

LIN Chao, GU Si-jia

( The State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China.

Corresponding author: LIN Chao, E-mail: linchao@cqu.edu.cn )

**Abstract:** To study contact characteristics of the curve-face gears, a transmission coordinate of curve-face gears was established. The instantaneous rotation axis and the axode of the curve-face gear were derived. The calculation method of meshing point of line contact curve-face gear was obtained based on the fundamental theorem of meshing tooth profile. The tooth contact prints and the tooth profile points were obtained in the view of geometry. The results of tooth contact analysis of the curve-face gear show that the positions of profile modification are determined. The calculation method of meshing point of line contact curve-face gear pair was verified via rolling experiments.

**Key words:** curve-face gear; tooth contact; axode; variable transmission ratio; line contact

面齿轮传动系统具有重合度高、传动平稳、对安装误差 sensitiv 等优点,因而在航空工业、船舶工业、车辆工程等领域具有很广阔的应用前景.国内外学者对面齿轮的理论研究及工程应用进行了大量的探讨. Litvin 对面齿轮的齿面建模、接触分析、传动特性分析等基础理论的研究与应用进行了探讨并取得众多科研成果<sup>[1-3]</sup>. Zanzi 对面齿轮副中的圆柱齿轮进行了修型并对其做了齿面接触分析及齿根弯曲应力分析<sup>[4]</sup>. Barone、Guingand 对面齿轮进行了有限元分析,得到了面齿轮的接触应力、弯曲应力等性能参数<sup>[5-6]</sup>. 国内学者对面齿轮的研究工作主要集中在面齿轮的加工制造、啮合理论研究、接触分析及有限元仿真分析等研究工作上<sup>[7-8]</sup>.

端曲面齿轮(亦称为正交非圆面齿轮、正交变传动比面齿轮)是与非圆柱齿轮实现空间正交啮合传动的面齿轮.当用非圆柱齿轮在 Solidworks 中通过展成运动仿真加工出端曲面齿轮三维实体模型后,在三轴数控铣床上导入其模型则可加工出端曲面齿轮,将非圆柱齿轮与端曲面齿轮啮合传动时,该齿轮副能实现线接触传动.与非圆锥齿轮副相比,线接触端曲面齿轮副具有高重合度、高承载力、非圆柱齿轮不受轴向力作用等优点,且可利用现有机床和刀具加工,因而在一些特殊场合如纺织机械、农用机械、工程机械、汽车等领域有着广阔的应用前景.针对该新型面齿轮副,林超等学者对其进行了齿轮副的理论设计、三维建模、加工制造等研究与实验,对端曲面齿轮

收稿日期: 2015-04-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51275537).

作者简介: 林 超(1958-)男,重庆人,重庆大学教授,博士生导师.

副的齿面接触进行了一定的理论推导和 ANSYS 仿真,但并未在线接触端面齿面接触算法研究方面进行深入探讨<sup>[9]</sup>.

本文利用齿廓啮合基本定理,结合空间坐标变换原理,从几何学的角度提出一种线接触端面齿面接触算法,用于研究该齿轮副的齿面接触特性,为该新型面齿轮的进一步理论分析与工程应用提供理论支撑.

## 1 齿轮副的传动原理

### 1.1 齿轮副传动坐标系

在线接触端面齿面齿轮副的传动过程中,端面齿面与非圆柱齿轮的啮合传动具体表现为端面齿面齿轮的瞬轴面与非圆柱齿轮的瞬轴面之间的纯滚动,其传动比由端面齿面齿轮副的节曲线确定.齿轮副瞬轴面可以看作是由无数对满足齿轮副传动比运动规律的节曲线构成的曲面,齿轮副瞬轴面的对滚过程可以看作无数对满足齿轮副传动比运动规律的节曲线的对滚过程.根据齿轮副的啮合运动规律,可建立如图 1 所示坐标系.

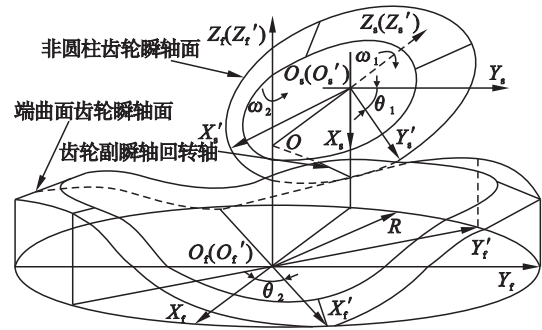


图 1 齿轮副的坐标系

Fig. 1 Coordinate system of curve-face gear pair

图 1 中  $O_s - X_s Y_s Z_s$  和  $O'_s - X'_s Y'_s Z'_s$  分别为非圆柱齿轮静坐标系与随动坐标系,  $O_f - X_f Y_f Z_f$  和  $O'_f - X'_f Y'_f Z'_f$  分别为端面齿面齿轮的静坐标系与随动坐标系.非圆柱齿轮为主动齿轮并绕  $Z_s$  轴顺时针转动,转角为  $\theta_1$ ,端面齿面齿轮为从动齿轮并绕  $Z_f$  轴转动,转角为  $\theta_2$ ,平面  $X_s Y_s$  到  $Z_f$  轴的距离为  $R$ ,平面  $X_f Y_f$  到  $Z_s$  轴的距离为  $r(0)$ ,  $Z_f$  轴与  $Z_s$  轴垂直相交.如图 1 所示,在截面  $O_s - X_s Y_s$  内的非圆柱齿轮的节曲线与在半径为  $R$  的圆柱面上的端面齿面齿轮的节曲线为齿轮副的一对节曲线,此对节曲线为齿轮副的基本节曲线.

### 1.2 齿轮副的节曲线表示

在所有新型齿轮传动中,节曲线为高阶椭圆的非圆齿轮应用最广,因此选择端面齿面齿轮副中

非圆柱齿轮的节曲线为高阶椭圆.非圆柱齿轮的基本节曲线在随动坐标系  $O'_s - X'_s Y'_s$  中用极坐标方程表示为

$$r(\theta_1) = \frac{a(1-k^2)}{1-k\cos(n_1\theta_1)}. \quad (1)$$

式中  $\theta_1$ ,  $a$ ,  $k$ ,  $n_1$  分别为非圆柱齿轮的转角、长半轴、偏心率、阶数.

由式(1)可得非圆柱齿轮的基本节曲线在非圆柱齿轮的随动坐标系  $O'_s - X'_s Y'_s Z'_s$  中表示为

$$r^{(O'_s)}(\theta_1) = \begin{bmatrix} r(\theta_1)\cos\theta_1 \\ r(\theta_1)\sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

根据图 1 所示齿轮副的相互运动关系,非圆柱齿轮的随动坐标系  $O'_s - X'_s Y'_s Z'_s$  到端面齿面齿轮的随动坐标系  $O'_f - X'_f Y'_f Z'_f$  的坐标变换矩阵为<sup>[9]</sup>

$$M_{O'_f O'_s} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & -R\cos\theta_2 \\ -\sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_2 & R\sin\theta_2 \\ -\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & r(0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

式中:  $R = \frac{n_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(\theta_1) d\theta_1 = \frac{1}{R} \int_0^{\theta_1} r(\theta) d\theta$ ,  $n_2$  为端面齿面齿轮的阶数,则端面齿面齿轮的基本节曲线在其随动坐标系  $O'_f - X'_f Y'_f Z'_f$  中表示为

$$r^{(O'_f)} = M_{O'_f O'_s} r^{(O'_s)}(\theta_1) = \begin{bmatrix} -R\cos\theta_2 \\ R\sin\theta_2 \\ r(0) - r(\theta_1) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

由式(4)可看出端面齿面齿轮的基本节曲线为分布在半径为  $R$  的圆柱面上一条呈周期性变化的空间曲线.

### 1.3 齿轮副节点及瞬轴面

如图 1 所示,过非圆柱齿轮的节曲线与非圆柱齿轮和端面齿面齿轮回转轴的交点  $O$  形成的非圆锥曲面为非圆柱齿轮的瞬轴面,过端面齿面齿轮的节曲线与回转轴交点  $O$  形成的非圆锥曲面为端面齿面齿轮的瞬轴面,两非圆锥曲面的切触线为齿轮副的瞬时回转轴.非圆柱齿轮的瞬轴面是由瞬时回转轴在非圆柱齿轮的随动坐标系中形成的直线簇.瞬时回转轴在固定坐标系  $O_s - X_s Y_s Z_s$  中表示为

$$r^{(O_s)}(\theta_1, \mu_k) = \left[ \frac{R+u_k}{R} r(\theta_1) \right] \rho(\mu_k)^T. \quad (5)$$

式中  $u_k$  为标记沿非圆柱齿轮轴向变化的变量.当  $u_k$

为一定值时  $r^{(O_s)}(\theta_1, \mu_k)$  表示齿轮副的 1 个节点。  
由坐标变换原理可得非圆柱齿轮的瞬轴面为

$$r^{(O_s)}(\theta_1, \mu_k) = \begin{bmatrix} \frac{R+u_k}{R}r(\theta_1)\cos\theta_1 \\ \frac{R+u_k}{R}r(\theta_1)\sin\theta_1 \\ u_k \end{bmatrix} \quad (6)$$

端面齿面的瞬轴面是由瞬时回转轴在端面齿面的随动坐标系中形成的直线簇,则端面齿面的瞬轴面为

$$r^{(O_s)}(\theta_1, \mu_k) = \begin{bmatrix} -(R+u_k)\cos\theta_2 \\ (R+u_k)\sin\theta_2 \\ \frac{R+u_k}{R}r(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

由式(6)、式(7)可知,当  $u_k$  为一定值时,齿轮副的瞬轴面方程表示齿轮副的一对节曲线,且非圆柱齿轮节曲线分布在  $Z_s = u_k$  截面内,端面齿面的节曲线分布在半径为  $R + u_k$  的圆柱面上。

1.4 刀具齿面方程及相关矩阵变换

非圆柱齿轮的齿廓由渐开线圆柱刀具齿面通过内包络形成,且齿轮副在啮合传动时,刀具齿面与非圆柱齿轮均顺时针转动。非圆柱齿轮齿面的形成与刀具齿面( $Z_s = u_k$  截面)示意图如图 2 所示。

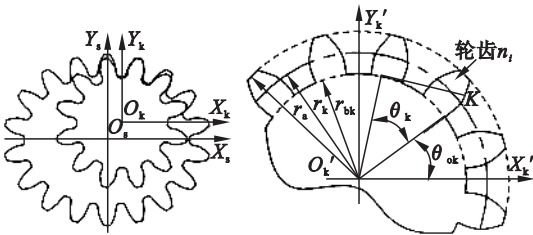


图 2 刀具齿面齿面表示  
Fig. 2 Tooth profile of cutter gear  
(a)—内啮合示意图;(b)—刀具齿面示意图。

$O_k - X_k Y_k Z_k$  和  $O'_k - X'_k Y'_k Z'_k$  分别为刀具齿面的静坐标系与随动坐标系。考虑刀具齿面与非圆柱齿轮在内啮合过程中,为刀具齿面的左齿廓  $\Sigma_1$  与非圆柱齿轮的左齿面  $\Sigma_2$  啮合,则本文需要推导刀具齿面的左齿廓,则在  $O'_k - X'_k Y'_k Z'_k$  中刀具齿面第  $n_i$  齿的左齿廓  $\Sigma_1$  上  $K$  点的方程<sup>[9]</sup>为

$$r^{(O'_k)}_{\Sigma_1}(u_k, \theta_k) = \begin{bmatrix} r_{bk}[\cos(\theta_{ok} + \theta_k) + \theta_k \sin(\theta_{ok} + \theta_k)] \\ r_{bk}[\sin(\theta_{ok} + \theta_k) - \theta_k \cos(\theta_{ok} + \theta_k)] \\ u_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: $r_{bk} = r_k \cos \alpha_0$ ;  $\theta_{ok} = (4n_i - 3)\frac{\pi}{2z_k} - \text{inv} \alpha_0$ ;  
 $\theta_k \in [0, \sqrt{r_a^2 - r_{bk}^2}/r_{bk}]$ ,  $r_a$  为刀具齿轮的齿顶圆半径; $r_k$  为刀具齿轮的节曲线半径; $r_{bk}$  为刀具齿轮的基圆半径; $z_k$  为刀具齿轮的齿数; $\alpha_0$  为刀具齿轮的压力角。

在图 2a 中,非圆柱齿轮与刀具齿面的位置关系及其转动角度关系如图 3 所示。

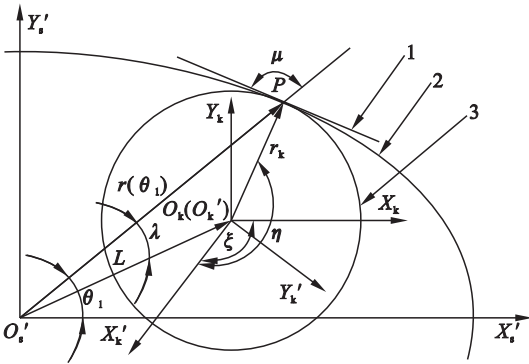


图 3 非圆柱齿轮与刀具齿面的关系  
Fig. 3 Position relationship between non-cylindrical gear and cutter gear

由图 3 可知,刀具随动坐标系到非圆齿轮的随动坐标系的坐标变换为

$$M_{s'k'} = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 & L \cos(\theta_1 - \lambda) \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 & L \sin(\theta_1 - \lambda) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: $L = \sqrt{r^2(\theta_1) + r_k^2 - 2r_k r(\theta_1) \sin \mu}$ ,  
 $\lambda = \arccos(L^2 + r^2(\theta_1) - r_k^2 / 2Lr(\theta_1))$ ,  
 $\mu = \arctan(r(\theta) / r'(\theta))$ ,  $r'(\theta) = dr(\theta) / d\theta$ ,  
 $\xi = \frac{\pi}{2} + \eta - \theta_1 - \mu$ ,  $\eta = \int_0^{\theta_1} \sqrt{\kappa(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta / r_k$ .

由图 1 可知,非圆柱齿轮随动坐标系到其静坐标系的坐标变换方程为

$$M_{ss'} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

2 齿面接触线方程

由齿廓啮合基本原理<sup>[1]</sup>可知,齿轮副啮合传动时,啮合点处的法线经过齿轮副此时的节点,则线接触端面齿面的齿面接触线的形成原理为:齿轮副的瞬时回转轴由齿轮副的节点组成,组成



确定线接触端曲面齿轮副的基本几何参数后,通过 MATLAB 软件编程计算可得端曲面齿轮副齿面接触印痕,因端曲面齿轮副的齿面变化具有周期性与对称性,因此可用端曲面齿轮副半个周期内齿面接触印痕的变化来反映整个端曲面齿轮副齿面接触印痕的变化规律,在 Solidworks 中将 MATLAB 软件计算所得的端曲面齿轮接触线坐标导入其三维实体模型,其半个周期内齿面接触印痕变化如图 5 所示。

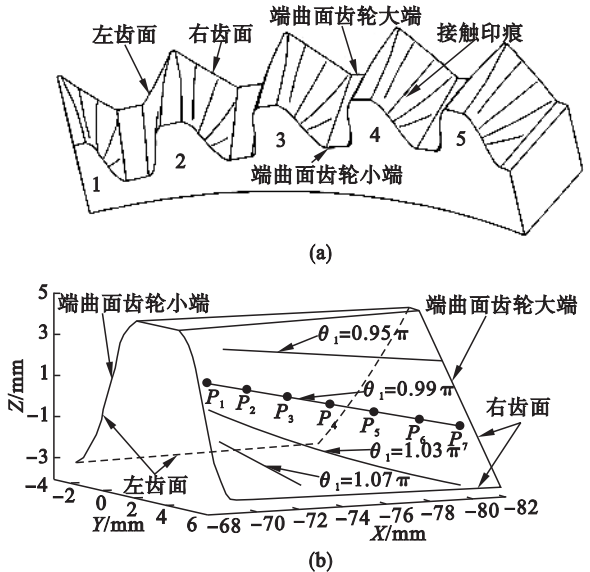


图 5 端曲面齿轮齿面接触印痕

Fig. 5 Tooth contact prints of curve-face gear  
(a)—端曲面齿轮半个周期齿面接触印痕;  
(b)—端曲面齿轮轮齿 1 齿面理论接触印痕。

图 5b 中端曲面齿轮轮齿 1 齿面上的 4 条接触线分别为非圆柱齿轮转角  $\theta_1 = 0.95\pi, 0.99\pi, 1.03\pi, 1.07\pi$  时在端曲面齿轮轮齿 1 齿面上所形成的接触线。

当非圆柱齿轮转角  $\theta_1 = 0.99\pi$  时,端曲面齿轮轮齿 1 齿面上接触线的部分坐标值见表 1。

表 1  $\theta_1 = 0.99\pi$  时接触线部分坐标  
Table 1 Contact line coordinate values when  $\theta_1 = 0.99\pi$

点编号	X/mm	Y/mm	Z/mm
$P_1$	-70.340 186 37	2.549 983 788	1.692 302 894
$P_2$	-71.341 359 84	2.608 881 407	1.469 773 354
$P_3$	-73.344 984 23	2.800 242 347	0.962 859 253
$P_4$	-75.349 618 68	3.049 771 948	0.453 943 749
$P_5$	-77.354 813 9	3.331 595 548	-0.028 779 227
$P_6$	-79.360 310 51	3.630 775 744	-0.477 844 961
$P_7$	-81.365 949 14	3.938 135 085	-0.892 508 08

端曲面齿轮由非圆柱齿轮通过展成加工而来,因此仿真加工时端曲面齿轮齿面上的切触痕迹线即为端曲面齿轮副啮合传动时的接触线。仿真加工时端曲面齿轮齿面上的切触痕迹如图 6 所示。

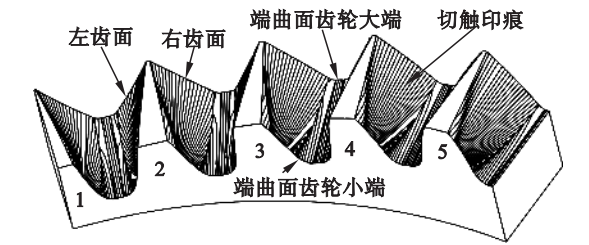


图 6 端曲面齿轮齿面切触印痕  
Fig. 6 Tooth cutting prints of curve-face gear

由图 5、图 6 及表 1 分析可得：

1) 端曲面齿轮齿面上的接触线为一条倾斜的空间曲线,其倾斜趋势为靠近端曲面齿轮小端的接触线往齿顶方向倾斜,靠近端曲面齿轮大端的接触线往齿根方向倾斜,且靠近齿顶的接触线的倾斜角度比靠近齿根的接触线的倾斜角度小。

2) 端曲面齿轮从端曲面齿轮轮齿大端齿顶进入啮合,从轮齿小端齿根退出啮合,在啮合过程中,啮合线先变长后变短。

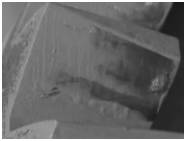

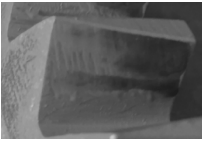
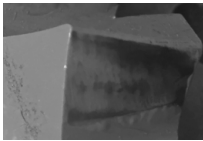
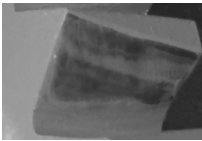
3) 在端曲面齿轮轮齿大端齿顶进入啮合与轮齿小端齿根退出啮合时,啮合线较短,容易出现边缘接触。在端曲面齿轮齿面中部,接触线分布在整个齿面上,有较好的传动质量与承载力。因此加工端曲面齿轮时,可对端曲面齿轮大端齿顶与小端齿根部分进行修形,使端曲面齿轮在轮齿齿面中部进行啮合,提高齿轮副传动质量与承载力。

## 4 实验验证

为了验证理论计算得到的接触轨迹与区域,需要对端曲面齿轮副进行对滚检测。选取理论分析中所用的端曲面齿轮副基本几何参数,利用 VB 和 Solidworks 二次开发工具,在 Solidworks 中用非圆柱齿轮通过展成运动仿真加工出端曲面齿轮三维实体模型后,在三轴数控铣床上导入其模型后加工出 4 阶的端曲面齿轮与 2 阶非圆柱齿轮,完成端曲面齿轮副的加工及相应的热处理后,在 500 mm 万能滚动检查机上做齿轮副的对滚实验,得到端曲面齿轮半个周期轮齿齿面的接触印痕,结果如表 2 所示。



表 2 端曲面齿轮齿面接触印痕及接触质量评价  
Table 2 Tooth contact prints of curve-face gear and contact quality evaluation

齿序号	1	2	3	4	5
齿面接触印痕					
齿面接触印痕面积分数/%	67. 8	64. 0	65. 3	71. 5	61. 2

由表 2 可得 ,线接触端曲面齿轮副的齿面接触印痕分布在整个轮齿齿面上 ,其接触印痕面积占齿面面积的 61. 2% ~ 71. 5% ,这是因为端曲面齿轮副齿面接触印痕实验结果受齿轮副的加工误差、安装误差等的影响 ,端曲面齿轮齿面不完全接触. 由轮齿接触印痕可知 ,端曲面齿轮在齿长方向上的接触质量高于轮齿在齿高方向上的接触质量 ,其接触印痕呈线接触 ,且与理论接触印痕的变化趋势一致 ,从而证明了线接触端曲面齿轮齿面接触算法的正确性.

端曲面齿轮在对滚过程中 ,轮齿的齿顶与小端磨损较为严重 ,验证了接触印痕理论分析的正确性. 根据其理论分析 ,在加工端曲面齿轮过程中 ,可对端曲面齿轮大端齿顶与小端齿根部分进行修形 ,使端曲面齿轮在轮齿齿面中部进行啮合 ,提高齿轮副传动质量与承载力.

5 结 论

1 ) 应用齿轮啮合原理 ,推导了线接触端曲面齿轮副的瞬时回转轴与瞬时面 ,从几何学角度建立了线接触端曲面齿轮副的齿面接触算法 ,得到了线接触端曲面齿轮的齿面接触印痕及齿面方程.

2 ) 端曲面齿轮齿面上的接触线为一条倾斜的空间曲线 ,齿轮副从轮齿大端齿顶进入啮合 ,从轮齿小端齿根退出啮合. 根据齿面接触分析结果提出对端曲面齿轮大端齿顶与小端齿根部分进行修形 ,以改善接触情况 ,提高齿轮副传动质量与承载力.

3 ) 线接触端曲面齿轮副的对滚实验证明了齿面接触算法与齿面接触印痕分析的正确性.

参考文献 :

[ 1 ] Litvin F L. Gear geometry and applied theory [ M ].

Englewood Cliffs :Prentice Hall ,1994.

[ 2 ] Litvin F L ,Fuentes A ,Zanzi C ,et al. Design ,generation ,and stress analysis of two versions of geometry of face-gear drives [ J ]. *Mechanism and Machine Theory* 2002 ,37( 10 ) :1179 – 1211.

[ 3 ] Litvin F L ,Fuentes A ,Zanzi C ,et al. Face-gear drive with spur involute pinion :geometry ,generation by a worm ,stress analysis[ J ]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002 ,191( 25 ) :2785 – 2813.

[ 4 ] Zanzi C ,Pedrero J I. Application of modified geometry of face gear driv[ J ]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005 ,194( 27 ) :3047 – 3066.

[ 5 ] Guingand M ,de Vaujany J P ,Icard Y. Analysis and optimization of the loaded meshing of face gears[ J ]. *Journal of Mechanical Design* 2005 ,127( 1 ) :135 – 143.

[ 6 ] Barone S ,Borgianni L ,Forte P. Evaluation of the effect of misalignment and profile modification in face gear drive by a finite element meshing simulation[ J ]. *Journal of Mechanical Design* 2004 ,126( 5 ) :916 – 924.

[ 7 ] 彭先龙 ,方宗德 ,苏进展 ,等. 应用大碟形刀具加工面齿轮的理论分析 [ J ]. 哈尔滨工业大学学报 2013 ,45( 5 ) :80 – 85. ( Peng Xian-long ,Fang Zong-de ,Su Jin-zhan ,et al. Theory analysis for application of disk tool of long radius in face gear machining[ J ]. *Journal of Harbin Institute of Technology* , 2013 ,45( 5 ) :80 – 85. )

[ 8 ] 唐进元 ,刘艳平. 直齿面齿轮加载啮合有限元仿真分析 [ J ]. 机械工程学报 2012 ,48( 5 ) :124 – 131. ( Tang Jin-yuan ,Liu Yan-ping. Loaded meshing simulation of face-gear drive with spur involute pinion based on finite element analysis[ J ]. *Journal of Mechanical Engineering* , 2012 ,48( 5 ) :124 – 131. )

[ 9 ] 林超 ,李莎莎 ,龚海. 正交变传动比面齿轮的设计及三维造型 [ J ]. 湖南大学学报 ( 自然科学版 ) ,2014 ,41( 3 ) :49 – 55. ( Lin Chao ,Li Sha-sha ,Gong Hai. Design and 3D modeling of orthogonal variable transmission ratio face gear[ J ]. *Journal of Hunan University( Nature Science )* 2014 ,41( 3 ) :49 – 55. )