

基于固结理论和蠕变模型的软土固结蠕变理论

孙明乾<sup>1</sup>,王 清<sup>1</sup>,牛岑岑<sup>1</sup>,孙 铁<sup>2</sup>

( 1. 吉林大学 建设工程学院,吉林 长春 130000 ;2. 建设综合勘察研究设计院有限公司,北京 100007 )

摘 要：通过分级加荷的方式对天津滨海新区经过真空预压处理后的软土进行一维压缩蠕变试验. 根据试验所得到的成果,在 Terzaghi 一维固结理论的基础上,用修正的 Singh-Mitchell 经验蠕变模型建立了一个新的一维固结微分方程. 该方程以一维压缩蠕变试验中所获得的土体力学指标作为计算参数,考虑了软土在主固结阶段结束后所产生的蠕变变形. 利用该方程对不同深度和不同应力水平下的试样进行固结和蠕变计算,计算结果与试验结果很接近,表明该方程能够充分反映软土的应力、应变和时间的关系,适用于天津滨海新区的吹填软土地基.

关 键 词：软土地基;蠕变;Terzaghi 一维固结理论;经验蠕变模型;Singh-Mitchell 模型  
中图分类号：TU 463 文献标志码：A 文章编号：1005 - 3026( 2016 )08 - 1188 - 05

Consolidation and Creep Theory Based on Terzaghi Consolidation Theory and Empirical Creep Model

SUN Ming-qian<sup>1</sup>, WANG Qing<sup>1</sup>, NIU Cen-cen<sup>1</sup>, SUN Tie<sup>2</sup>

( 1. Construction Engineering College, Jilin University, Changchun 130000, China ; 2. China Institute of Geotechnical Investigation and Surveying Co., Ltd., Beijing 100007, China. Corresponding author : WANG Qing, E-mail : wangqing@jlu. edu. cn )

**Abstract** : Based on the one-dimensional compression creeping and step-loading test on the soft soil subjected to the vacuum preloading treatment in Tianjin Binhai New Area , the modified Singh-Mitchell empirical creep model was used to improve the Terzaghi consolidation theory , and a new one-dimensional consolidation equation was obtained. The new equation used the soft soil mechanics indexes , obtained from the one-dimensional compression and creep tests , as the calculation parameters , and considered the creep deformation generated after primary consolidation. The results obtained from the new equation on different depths of specimens with different stress levels are very close to the test results , which indicates that the new equation can reflect the stress-strain-time relationship of soft soil and is applicable for the soft soil foundation in Tianjin Binhai New Area.

**Key words** : soft soil foundation ; creep ; Terzaghi consolidation theory ; empirical creep model ; Singh-Mitchell model

向海要地一直是人类获取土地资源的重要手段,自从20世纪30年代荷兰围海造陆工程以来,世界上许多沿海地区都在大规模开展围海造陆工程,如日本、阿联酋等国家.为了满足经济快速增长的需要,缓解土地资源日益减少的问题,我国的围海造陆工程在近几十年也取得了非常大的发

展.以天津市为例,天津滨海新区自上世纪末,进行了大规模的围海造陆项目,在天津滨海地区形成了大量的软土地基.但是由于围海造陆形成的软土具有明显的蠕变特性,使得天津滨海软土地基在实际工程中的工后沉降量较大,在较长时间内无法达到稳定,甚至产生不均匀沉降,对地基上

的建筑物稳定性产生较大的影响. 例如根据地面沉降监测,区内南疆港地区在吹填造陆十年后,每年仍有 30 mm 左右的地面沉降量<sup>[1]</sup>. 因此研究天津滨海新区吹填软土地基的固结与蠕变特性,掌握其应力和变形规律,将为天津滨海软土地基的工后沉降问题解决提供理论依据,为围海造陆工程方法的进一步发展解决实际问题,对软土固结与蠕变的机理研究进行进一步的探索.

土体固结理论是由 Terzaghi 最早提出的<sup>[2]</sup>,这个固结理论有一定的前提条件,并不能完全反映实际工程中土体的应力应变关系. 比如 Terzaghi 固结理论所针对的问题主要为土体的主固结阶段,而软土在次固结阶段中,土体中孔隙水压力已经消散,在施加应力不变的情况下仍然会产生应变,这一现象也可以称为蠕变变形. 此后国内外许多学者为了进一步完善土体固结和蠕变理论,均进行了大量的实际工程和室内试验研究,提出了许多土体的固结和蠕变理论模型. Christe 在土体应力应变关系分析中应用了多元件组合模型,用来模拟软土的蠕变变形,并对 Terzaghi 一维固结理论进行了改进<sup>[3]</sup>. Singh 和 Mitchell 基于大量的室内压缩蠕变试验数据,总结出土体蠕变过程中的应力应变变化规律,得到了著名的 Singh-Mitchell 经验蠕变模型<sup>[4]</sup>. 王清等对天津滨海新区围海造陆实际工程的施工工艺、软土的固结蠕变性质,以及软土在吹填沉积过程中微观结构变化等方面均作出了许多有意义的研究<sup>[5]</sup>.

因此,为了研究软土在不同应力条件下的固结和蠕变规律,本文通过分析天津滨海新区吹填软土的一维压缩蠕变试验成果,利用 Singh-Mitchell 经验蠕变模型,在 Terzaghi 一维固结理论的基础上构造了一个反映软土次固结阶段应变的一维固结微分方程,对软土的固结和蠕变性质提供一种新的力学模型解释.

### 1 试验概述

试验土样取自天津滨海新区中心渔港经过真空预压加固处理的吹填造陆地区. 分别在深度为 5、10 和 20 m 处取土样,进行一维压缩蠕变试验. 吹填软土地基主要由软黏土组成,基本参数见表 1.

一维压缩蠕变试验采用 WG 型高压固结仪. 本次试验采用分级加荷的方式,分级加载的加荷等级为 25、50、100、200 和 300 kPa. 在实际条件下软土的蠕变往往要持续很长的时间,但是由于进

行软土压缩试验的室内条件有限,而且影响因素较多,因此进行较长时间的压缩蠕变试验误差较大,精度有限. 在实际试验操作中,通常采用在较短时间内施加较大荷载的办法,缩短蠕变时间,减小误差,并规定一定的应变标准作为加载依据. 一般取每级加荷时间间隔以变形稳定为标准,稳定标准取 0.005 mm/d,即 1 天内的压缩量不超过 0.005 mm 时,可施加下一级荷载<sup>[6]</sup>.

表 1 基本物理力学参数						
Table 1 Basic properties of experimental soil						
土性	埋深 <i>h</i> /m	密度 $\rho/(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$	含水率 <i>w</i> /%	孔隙比 <i>e</i> <sub>1</sub>	压缩系数 <i>a</i> /MPa <sup>-1</sup>	液性 指数
粉土	5	1.937	28.3	0.785	0.444	1.045
粉质黏土	10	1.975	24.2	0.742	0.305	0.923
粉质黏土	20	1.982	26.8	0.725	0.312	0.735

## 2 反映软土固结和蠕变性状的应力-应变-时间关系式

### 2.1 考虑蠕变的一维固结微分方程

土体蠕变和固结理论是土力学研究中的重点问题,国内外学者都对这一问题做了很多研究. 最早奠定土体固结理论研究基础的是 Terzaghi 在 1925 年《建立在土的物理学基础的土力学》一书中提出的 Terzaghi 一维固结理论. Terzaghi 认为土体的固结过程即为土中孔隙水压力在应力作用下不断消散的过程. 当孔隙水压力减小为零时,土体的应变也达到了最大值. 然而对于主要由软黏土组成的软土地基来说,孔隙水压力完全消散、有效应力基本上不变的情况下,随时间发展沉降量继续变大,即发生蠕变现象. 由于软土的固结过程与传统的 Terzaghi 一维固结理论并不相符,因此将土体中孔隙水压力消散前的固结阶段称为主固结阶段,孔隙水压力消散后继续产生应变的阶段称为次固结阶段. 在次固结阶段软土继续产生应变的原因是土中的结合水以黏滞流动的状态逐渐排出,使得土颗粒之间的结合水膜厚度减小,土颗粒之间的连接发生改变,在宏观上表现为土体产生了应变,体积减小<sup>[7]</sup>. 为了改进传统 Terzaghi 一维固结理论无法阐述软土在次固结阶段产生应变的不足,本文尝试利用蠕变理论建立新的软土一维固结模型解决这一问题.

由土体常规压缩试验的  $e-p$  关系曲线可知

$$\Delta e = \Delta e(1 + e_1) = e_p - e_s, \quad (1)$$

即

$$e_s = e_p - \Delta \varepsilon (1 + e_1) . \tag{2}$$

式中  $\Delta e$  为固结产生的孔隙比的变化  $\Delta \varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_p$  为固结产生的应变增量  $\varepsilon_s$  为土体在固结蠕变结束后最终的应变量  $\varepsilon_p$  为土体在主固结阶段结束后的应变量  $e_1$  为土体固结蠕变开始前的孔隙比  $e_p$  为土体在主固结阶段结束后的孔隙比  $e_s$  为土体固结蠕变结束后的孔隙比.

Terzaghi 一维固结理论的提出是在在一定前提条件下的. 在土体蠕变固结过程中, 在土体中取一单位体积的微元体作为研究对象. 在固定的时间内, 土体微元体体积的变化即孔隙体积的变化. 由于土为三相介质, 且 Terzaghi 一维固结理论以饱和土体为研究对象, 土颗粒的变形可以忽略不计, 因此孔隙体积的变化等于排出水量的体积.

$dt$  时间内孔隙体积  $V$  的变化为

$$dV = \frac{\partial V_1}{\partial t} dt + \frac{\partial V_2}{\partial t} dt = \frac{\alpha(e_p V_s)}{\partial t} dt + \frac{\alpha(e_s V_s)}{\partial t} dt = \frac{1}{1 + e_1} \left[ \frac{\alpha(e - e_s)}{\partial t} + \frac{\partial e_s}{\partial t} \right] dx dy dz dt . \tag{3}$$

式中  $\frac{\partial V_1}{\partial t} dt = \frac{\alpha(e_p V_s)}{\partial t} dt$  为主固结沉降阶段微元

体内孔隙体积的变化  $\frac{\partial V_2}{\partial t} dt = \frac{\alpha(e_s V_s)}{\partial t} dt$  为主固结沉降阶段结束后微元体内孔隙体积的变化 ;

$V_s = \frac{1}{1 + e_1} dx dy dz$  表示微元体体积, 在土体固结过程中不发生变化.

根据 Terzaghi 一维固结理论的前提条件, 在蠕变固结过程中土体孔隙比的变化量和有效应力的变化值为正相关关系, 且二者比值为压缩系数. 这一前提条件在土体蠕变的整个过程中均适用. 根据这一前提条件可以将主固结沉降阶段微元体内孔隙体积的变化进行转化 :

$$\frac{\partial e_p}{\partial t} = -a \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = -a \frac{\alpha(\sigma - u)}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial t} . \tag{4}$$

式中  $\sigma$  为总应力  $\sigma'$  为有效应力  $u$  为孔隙水压力.

由式 (2) 可得

$$\frac{\partial e_s}{\partial t} = - \frac{\alpha[e_p - \Delta \varepsilon (1 + e_1)]}{\partial t} = -(1 + e_1) \frac{\partial \Delta \varepsilon}{\partial t} = -(1 + e_1) \frac{\alpha(\varepsilon_s - \varepsilon_p)}{\partial t} = -(1 + e_1) \dot{\varepsilon}_s . \tag{5}$$

式中  $\dot{\varepsilon}_s$  为土体在主固结沉降阶段结束后的应变速率, 则  $dt$  时间内微元体孔隙体积  $V$  的变化可以转化为

$$dV = \left[ \frac{a}{1 + e_1} \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\varepsilon}_s \right] dx dy dz dt . \tag{6}$$

根据达西定律,  $dt$  时间内微元体内水量  $Q$  的变化为

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial t} dt = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx dy dz dt . \tag{7}$$

式中  $k$  为土体的渗透系数  $\gamma_w$  为水的容重.

令  $C_v = \frac{k(1 + e_1)}{a \gamma_w}$ ,  $C_v$  即为土的竖向固结系数.

由  $dQ = dV$ , 以及式 (6) 和式 (7) 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1 + e_1}{a} \dot{\varepsilon}_s . \tag{8}$$

2.2 根据修正 Singh-Mitchell 经验蠕变方程改进的一维固结微分方程

Singh 和 Mitchell 为了研究土的蠕变性质, 进行了一系列的蠕变试验, 得到了许多软土蠕变过程中应力和应变的变化规律, 并提出了著名的 Singh-Mitchell 经验蠕变方程<sup>[8-9]</sup>. Singh-Mitchell 经验蠕变方程表明, 软土在较低应力的作用下产生蠕变, 土体应变速率和蠕变经历时间在对数坐标中呈现明显的线性相关关系, 随着蠕变时间的增加, 土体应变速率逐渐减小. Singh-Mitchell 经验蠕变方程的基本表达式如下 :

$$\dot{\varepsilon} = A e^{aD} \left( \frac{t_1}{t} \right)^m . \tag{9}$$

式中  $D$  为应力水平, 定义为  $D = (\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_{1f} - \sigma_{3f}$ ,  $f$  表示破坏时刻,  $t_1$  为可取单位时间,  $A$ ,  $\alpha$ ,  $m$  为蠕变试验材料常数.

本研究对不同深度的、经过真空预压处理后的吹填软土试样进行一维压缩蠕变试验. 根据一维压缩蠕变试验结果, 得出了应变速率与时间的关系双对数曲线, 如图 1 所示.

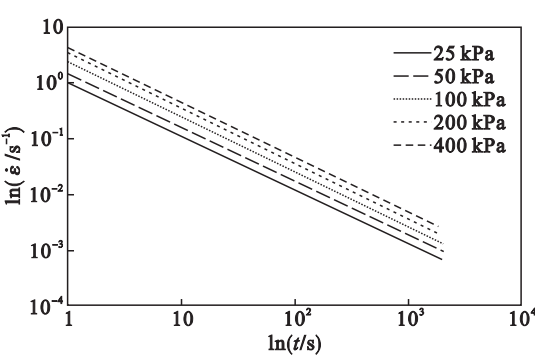


图 1 应变速率与时间关系曲线  
Fig. 1 Curves of strain rate vs time

根据本研究一维压缩试验结果所得到的关系曲线与 Singh-Mitchell 的研究结果十分符合, 线性关系十分明显, 经过拟合可以得到

$$\ln \dot{\varepsilon} = -m \ln \left( \frac{t}{t_1} \right) + \ln \dot{\varepsilon}_{(t_1, q)} . \tag{10}$$

式中  $\dot{\varepsilon}_{(t_1, q)}$  为图 1 中关系曲线的截距,表示软土在蠕变过程中单位时间的应变速率; $m$  为图 1 中关系曲线斜率的负数.

由图 1 中可以看出  $\dot{\varepsilon}_{(t_1, q)}$  (即曲线的截距)随所加荷载  $p$  的增大而增大,由此设想  $\dot{\varepsilon}_{(t_1, q)}$  与  $p$  存在某种联系.可以绘出  $\dot{\varepsilon}_{(t_1, q)}$  与应力  $p$  的关系,如图 2 所示.

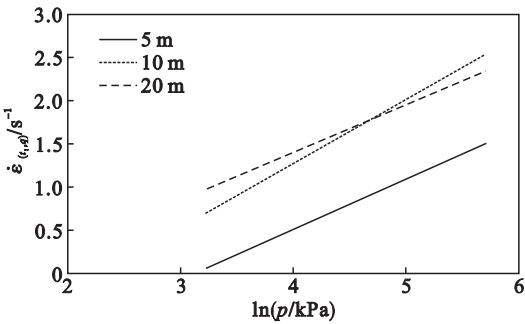


图 2 曲线的截距  $\dot{\varepsilon}_{(t_1, q)}$  与施加荷载  $p$  的关系曲线  
Fig. 2 Relationship between  $\dot{\varepsilon}_{(t_1, q)}$  and  $p$

从图 2 中可以看出,应变速率与时间双对数曲线的截距  $\dot{\varepsilon}_{(t_1, q)}$  与施加荷载  $p$  呈现很好的线性关系,可以得出其拟合方程:

$$\dot{\varepsilon}_{(t_1, q)} = \beta \ln p + \gamma. \tag{11}$$

式中  $\beta$ 、 $\gamma$  分别为图 2 中应变速率与时间对数关系曲线中的斜率与截距,将式(11)与应变速率与时间对数关系曲线联立可求得

$$\ln \dot{\varepsilon} = -m \ln \left( \frac{t}{t_1} \right) + \beta \ln p + \gamma. \tag{12}$$

即

$$\dot{\varepsilon} = p^\beta e^{\gamma} t^{-m}. \tag{13}$$

式(13)中的计算参数  $m$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  如之前所述,可以根据一维压缩蠕变试验的结果求出. $m$  值采用式(14)进行计算,减小试验误差.

$$\alpha = -m - \frac{\dot{\varepsilon}_{(t_1, q)} - \dot{\varepsilon}'_{(t_1, q)}}{10}. \tag{14}$$

式中  $\dot{\varepsilon}'_{(t_1, q)}$  是由拟合方程式(11)得出的计算值.则式(13)可以表示为

$$\dot{\varepsilon} = p^\beta e^{\gamma} t^\alpha. \tag{15}$$

由式(8)和式(15)可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1 + e_1}{a} p^\beta e^{\gamma} t^\alpha. \tag{16}$$

### 3 固结微分方程的计算

#### 3.1 固结微分方程的参数值

根据一维压缩蠕变试验的结果可以得出固结微分方程式(16)所需的参数  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ . 初始孔隙比

$e_1$  及压缩系数  $a$  取值如表 1 所示,固结系数  $C_v$  取值为天津滨海新区工程经验值  $0.02 \text{ m}^2/\text{d}$ . 吹填软土试样在不同深度、不同荷载作用下的蠕变参数  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  如表 2 所示.

表 2 固结微分方程参数值  
Table 2 Parameter values of consolidation differential equation

$h/\text{m}$	$\alpha \times 10^3$					$\beta$	$\gamma$
	25	50	100	200	300		
5	-967	-972	-977	-988	-994	0.602	-1.788
10	-931	-953	-959	-970	-988	0.753	-1.673
20	-970	-974	-978	-985	-990	0.577	-0.776

注:粗体数字 20、50、100、200、300 为施加载荷,单位是 kPa.

#### 3.2 有限差分法

采用有限差分法对根据 Singh-Mitchell 经验蠕变方程改进的一维固结微分方程进行求解.为了保证微分方程在求解过程中格式稳定,采用 Crank-Nicolson 差分格式.求解后可以得到软土在蠕变过程中的孔压,进而求得软土的蠕变量.对微分方程式(16)取向前差分格式:

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = C_v \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{(\Delta z)^2} + \frac{1 + e_1}{a} p^\beta e^{\gamma} (\Delta t)^{n-1} \alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 2) t^{\alpha - n + 1}. \tag{17}$$

再取向后差分格式,可得

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = C_v \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta z)^2} + \frac{1 + e_1}{a} p^\beta e^{\gamma} (\Delta t)^n \alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) t^{\alpha - n}. \tag{18}$$

为了求解固结微分方程式,将采用两种差分格式分解的方程式分别乘以系数  $1/2$ ,并将两式联立,可以得到式(19).

$$Au_{i+1}^n + (1 - 2A)u_i^n + Au_{i-1}^n = -Au_{i+1}^{n+1} + (1 + 2A)u_i^{n+1} - Au_{i-1}^{n+1} - [\Delta (\alpha - n)B + Bt] t^{\alpha - n - 1}. \tag{19}$$

式中  $A = \frac{\Delta t C_v}{2(\Delta z)^2}$ ,

$$B = \frac{1 + e_1}{2a} p^\beta e^{\gamma} (\Delta t)^{n+1} \alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1).$$

### 4 计算结果

根据 3.1 节由试验得出土样在不同荷载作用下的参数  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ,利用新建的一维固结微分方程式对天津滨海新区经过真空预压处理后的吹填软

土试样分别作了不同深度、不同应力水平下的蠕变变形计算,绘制应变和时间的关系曲线,并与试验曲线进行了比较,如图 3 所示。从图中可以看出利用新建一维固结微分方程式得到的计算值与试

验值很接近,说明该方程对于天津滨海新区经过真空预压处理后的吹填软土地基是适用的,能够充分反映软土固结和蠕变变形的应力、应变和时间的关系。

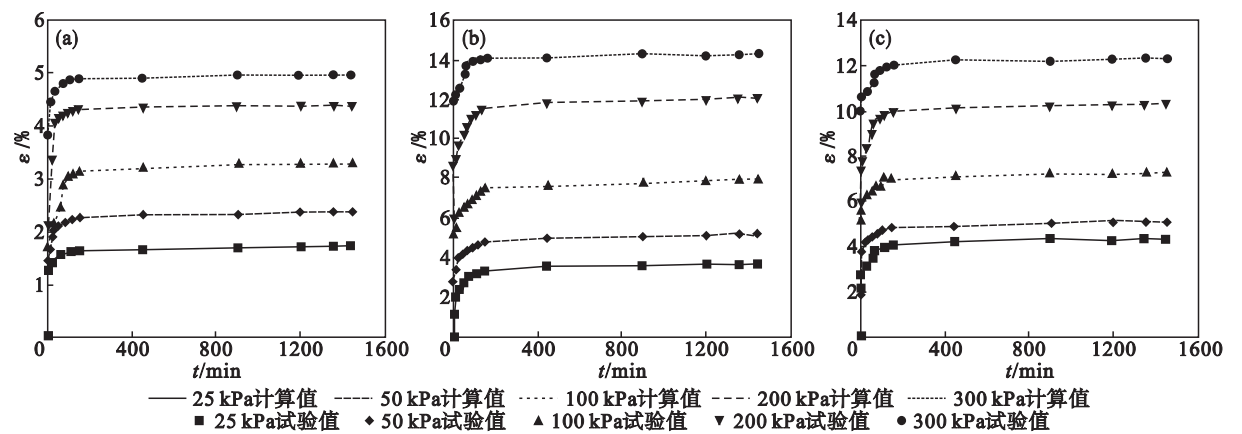


图 3 新建一维固结微分方程计算值与试验值对比曲线

Fig. 3 Comparison between test data and calculated results obtained from consolidation differential equation

( a )—取自 5 m 深处土样 ; ( b )—取自 10 m 深处土样 ; ( c )—取自 20 m 深处土样。

## 5 结 语

本文以天津滨海新区吹填形成的软土地基作为研究对象,通过分级加荷的方式对不同深度的软土进行一维压缩蠕变试验。利用试验所得到的一系列软土力学性质参数,对 Terzaghi 一维固结理论进行了改进。改进参考了 Singh-Mitchell 经验蠕变模型,并考虑了软土地基次固结沉降阶段发生的蠕变变形。新建的一维固结微分方程得到的计算值与试验值拟合较好,验证了该方程的有效性,而且该方程具有参数少、适用性较强等特点。

### 参考文献 :

[ 1 ] 杜东菊,杨爱武,赵建军,等.天津滨海软土[ M ].北京:科学出版社,2012.  
( Du Dong-ju, Yang Ai-wu, Zhao Jian-jun, et al. Tianjin coastal soft soil [ M ]. Beijing: Science Press, 2012. )

[ 2 ] Terzaghi K. Principles of soil mechanics[ M ]. [ S. l. ]: Engineering News Record, 1925.

[ 3 ] Christe I F. A re-appraisal of Merchant 's contribution to the theory of consolidation[ J ]. *Géotechnique*, 1964, 14 ( 4 ) :

309 - 320 .

[ 4 ] Singh A, Mitchell J K. General stress-strain-time function for soils[ J ]. *Journal of the Soil Mechanics & Foundations Division*, 1968, 94: 21 - 46.

[ 5 ] 王清,肖树芳.海积软土的工程地质研究现状[ J ].世界地质, 2000, 19( 3 ): 253 - 257.  
( Wang Qing, Xiao Shu-fang. A review on the engineering geology of marine soft soil[ J ]. *World Geology*, 2000, 19 ( 3 ): 253 - 257. )

[ 6 ] 苑晓青.新型真空预压法室内模拟试验与沉降的预测研究[ D ].吉林:吉林大学,2012.  
( Yuan Xiao-qing. The laboratory simulation tests of the new vacuum preloading methods and research on settlement prediction[ D ]. Jilin: Jilin University, 2012. )

[ 7 ] Le T M, Fatahi B, Khabbaz H. Numerical optimization to obtain elastic viscoplastic model parameters for soft clay[ J ]. *International Journal of Plasticity*, 2015, 65: 1 - 21.

[ 8 ] Zhu Y B, Yu H M. An improved Mesri creep model for unsaturated weak intercalated soils[ J ]. *Journal of Central South University*, 2014, 21( 12 ): 4677 - 4681.

[ 9 ] Gao H M, Chen G X. Modified Singh-Mitchell creep model for EPS composite soil[ J ]. *Advanced Materials Research*, 2011, 311/312/313: 339 - 343.