

执行器饱和的随机 Markov 跳变系统非脆弱有限时间镇定

齐文海, 李岳响, 崔秀丽

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 研究了带有执行器饱和与转移概率部分已知的随机 Markov 跳变系统的非脆弱有限时间镇定问题. 转移概率部分已知包含转移概率完全已知和转移概率完全未知两类特殊的情况. 首先基于参数依赖型 Lyapunov 函数和自由权矩阵方法, 对随机 Markov 饱和跳变系统的镇定进行了研究, 提出了有限时间稳定的充分条件. 然后利用线性矩阵不等式的方法实现了非脆弱有限时间状态反馈控制器与吸引域最大估计值的求解. 最后通过四模态随机 Markov 跳变系统的数值例子验证了结论的有效性.

关 键 词: 执行器饱和; Markov 跳变系统; 转移概率部分已知; 有限时间镇定; 非脆弱状态反馈控制器

中图分类号: TP 273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2016)09-1230-05

Non-fragile Finite-Time Stabilization for Stochastic Markov Jump Systems with Actuator Saturation

QI Wen-hai, LI Yue-xiang, CUI Xiu-li

(School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: QI Wen-hai, E-mail: qiwhtanedu@163.com)

Abstract: This paper dealt with the problem of finite-time stabilization for a class of stochastic Markov jump systems with both actuator saturation and partly known transition probabilities. Partly known transition probabilities covered completely known transition probabilities and completely unknown transition probabilities as two special cases. Firstly, by use of parameter-dependent Lyapunov function and free-connection weighting matrices, the problem of finite-time stabilization of stochastic Markov jump systems with actuator saturation was analyzed and sufficient conditions for finite-time stability were proposed. The procedure of solution for the non-fragile finite-time state feedback controller and the maximum domain of attraction were built in the form of linear matrix inequalities (LMIs). Finally, a numerical example about four modes with Markov jump parameters was given to show the validity of the results.

Key words: actuator saturation; Markov jump systems; partly known transition probabilities; finite-time stabilization; non-fragile state feedback controller

Markov 跳变系统是一类包含多个模态的重要随机混杂系统, 是 Krasovskii 和 Lidskiid 于 1961 年建立的^[1]. 在过去的几十年里, 由于能更好描述许多实际系统的特性, 例如故障诊断系统^[2]、制造系统^[3]等, Markov 跳变系统引起了很大关注. 关于这类问题的研究大都基于转移概率完全已知的情况. 然而, 考虑实际过程中的复杂因

素, 转移概率只有部分得到. 所以, 转移概率部分已知的 Markov 跳变系统的研究得到了越来越多的关注, 包括稳定、镇定^[4]、时滞^[5]等.

另一方面, 出于执行器幅值的限制或者安全因素的原因, 执行器饱和的存在严重影响系统性能甚至导致系统不稳定. 所以, 对执行器饱和的研究有很大的实际意义. 近年来, 越来越多的学者也

研究这类问题,如在稳定性分析与镇定^[6]、容错控制^[7]、时滞^[8]、Markov 跳变^[9]等方面。同时,随机系统的研究也已成为热点,例如网络控制^[10]、扰动^[11]和时滞^[12]。然而,考虑带有执行器饱和的 Markov 跳变系统的相关文献却很少。

现有的文献大都建立在 Lyapunov 稳定基础上,意味着系统在无限时间范围内是稳定的。相对于 Lyapunov 稳定性,有限时间稳定性意味着状态在固定时间区域内不会超过一定的界限^[13-15]。值得关注的是有限时间稳定并不意味着 Lyapunov 稳定。如果系统响应的瞬态超过预定的界限, Lyapunov 稳定并不包含有限时间稳定。

研究一类转移概率部分已知的随机 Markov 饱和跳变系统的非脆弱有限时间镇定问题,通过参数依赖型 Lyapunov 函数和自由权矩阵方法,设计了非脆弱有限时间状态反馈控制器并获得了吸引域的最大估计值。

1 问题描述及相关引理

考虑如下带有执行器饱和的随机 Markov 跳变系统:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{x}(t) &= [A(g_t)\mathbf{x}(t) + B(g_t)\sigma(\mathbf{u}(t))]dt + \\ &\quad W(g_t)\mathbf{x}(t)d\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, g_{t_0} = g_0, t_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}(t)$ 分别是系统的状态、控制输入和标准的维纳过程。 \mathbf{x}_0 , g_0 和 t_0 分别为初始状态、初始模态和初始时间; $A(g_t)$, $B(g_t)$ 和 $W(g_t)$ 为已知的具有适当维数的模态依赖常数矩阵。标准饱和函数 $\sigma(\cdot)$ 定义为

$$\sigma(\mathbf{u}) = [\sigma(u_1)\sigma(u_2)\dots\sigma(u_m)]^T,$$

其中 $\sigma(u_i) = \text{sign}(u_i) \min\{1, |u_i|\}$ 为符号函数。

本文将设计非脆弱状态反馈控制器:

$$\mathbf{u}(t) = (K(g_t) + \Delta K(g_t))\mathbf{x}(t). \quad (2)$$

其中: $K(g_t)$ 为控制器增益; $\Delta K(g_t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($\forall g_t = i \in S$) 为控制器增益的变化,可表示为

$$\Delta K(g_t) = H_k(g_t)F_k(g_t, t)M_k(g_t),$$

其中 $H_k(g_t)$ 和 $M_k(g_t)$ 为具有适当维数的常数矩阵,并且未知矩阵函数 $F_k(g_t, t)$ 满足

$$F_k^T(g_t, t)F_k(g_t, t) \leq I.$$

令 $\{g_t, t \geq 0\}$ 为连续 Markov 跳变过程, g_t 为系统模态并且在集合 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 上取值,转移概率矩阵 $\Pi = \{\pi_{ij}\}$, $i, j \in S$ 。

文中考虑转移概率部分已知,意味着在矩阵

$\Pi = \{\pi_{ij}\}$ 中只有一部分元素能够得到。对于 $i \in S$, 集合 $S^i = S_k^i \cup S_{uk}^i$, 其中

$$S_k^i \triangleq \{j: \pi_{ij} \text{ 已知 } j \in S\}, S_{uk}^i \triangleq \{j: \pi_{ij} \text{ 未知 } j \in S\}.$$

文中,令 $g_t = i$ 。

定义 1^[15] 对于给定的时间常数 T , 系统 (1) ($\mathbf{u}(t) = 0$) 是关于 (c_1, c_2, T, R_i) 有限时间稳定的, 如果下列条件成立: $\mathbf{x}_0^T R_i \mathbf{x}_0 \leq c_1 \Rightarrow \mathbf{x}^T(t) R_i \mathbf{x}(t) < c_2, \forall t \in [0, T]$, 其中 $0 < c_1 < c_2$, $R_i > 0$ 。

对于任意矩阵 $P_i > 0$, 定义椭圆

$$\xi(P_i) = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x}^T(t)P_i\mathbf{x}(t) \leq 1\}.$$

引理 1^[9] 对于任意的矩阵 $K_i, F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{x}(t) \in \psi(F_i)$, 则 $\sigma(K_i\mathbf{x}(t))$ 可表示为如下形式:

$$\sigma(K_i\mathbf{x}(t)) = \sum_{v=1}^{2^m} \eta_v (U_v K_i + U_v^- F_i) \mathbf{x}(t).$$

其中 $\psi(F_i) = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n: |f_{ij}\mathbf{x}(t)| \leq 1, j=1, 2, \dots, m\}$, f_{ij} 为矩阵 F_i 的第 j 行, $U_v, U_v^- = (I - U_v) \in \bar{\Pi}$, $v=1, 2, \dots, 2^m$, $\bar{\Pi}$ 是 $m \times m$ 的对角矩阵的集合, 其对角线上的元素为 1 或者 0; η_v 为标量, 并且

$$0 \leq \eta_v \leq 1, \sum_{v=1}^{2^m} \eta_v = 1.$$

考虑控制器 (2), 得到如下闭环系统:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{x}(t) &= \sum_{v=1}^{2^m} \eta_v [A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki} + \\ &\quad B_i U_v^- F_i] dt + W_i \mathbf{x}(t) d\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, g_{t_0} = g_0, t_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

引理 2^[16] T, M, N 和 F 为具有适当维数的矩阵, 其中 $F^T F \leq I$, 则对于任意正数 $\varepsilon > 0$, 有

$$T + M F N + N^T F^T M^T \leq T + \varepsilon M M^T + \varepsilon^{-1} N^T N.$$

2 主要结论

2.1 有限时间稳定问题分析

定理 1 对于给定的时间常数 T , 系统 (3) 是关于 (c_1, c_2, T, R_i) 有限时间稳定的, 如果存在正标量 ε_i, α , 对称正定矩阵 $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 对称矩阵 $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 有以下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & M_{ki}^T & \varepsilon_i P_i B_i U_v H_{ki} \\ * & -\varepsilon_i I & \mathbf{0} \\ * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

$$(P_j - Q_i) \leq 0, j \in S_{uk}^i, j \neq i, \quad (5)$$

$$(P_j - Q_i) \geq 0, j \in S_{uk}^i, j = i, \quad (6)$$

$$\xi(P_i) \subset \psi(F_i), \quad (7)$$

$$c_1 \lambda_{\max}(\bar{P}_i) < c_2 \lambda_{\min}(\bar{P}_i) e^{-\alpha T}. \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & (A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i)^T P_i + P_i (A_i + \\ & B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i) + W_i^T P_i W_i - \alpha P_i + \\ & \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} (P_j - Q_i); \\ \bar{P}_i = & R_i^{-1/2} P_i R_i^{-1/2}. \end{aligned}$$

此外, 初始状态包含在集合 $n_{i=1}^N \xi(P_i)$ 的吸引域内.

证明 选择 Lyapunov 函数为

$$V(x(t), i) = x^T(t) P_i x(t), \quad (9)$$

其相应的无穷小算子为

$$\begin{aligned} \Gamma V(x(t), i) = & x^T(t) [A_i^T P_i + \sigma(K_i + \Delta K_i)^T B_i^T P_i + \\ & P_i A_i + P_i B_i \sigma(K_i + \Delta K_i) + W_i^T P_i W_i + \\ & \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j] x(t). \end{aligned}$$

考虑 $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} Q_i = 0$, 其中 $Q_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为对称矩阵, 可以得到

$$\begin{aligned} \Gamma V(x(t), i) - \alpha V(x(t), i) = & \\ & \sum_{v=1}^{2m} \eta_v x^T(t) [B_i (U_v H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki})]^T P_i + \\ & P_i B_i U_v H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki} + (A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i)^T P_i + \\ & P_i (A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i) + W_i^T P_i W_i + \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} (P_j - \\ & Q_i) + \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} (P_j - Q_i) - \alpha P_i] x(t). \quad (10) \end{aligned}$$

根据引理 2, 存在正数 ε_i 使

$$\begin{aligned} (B_i (U_v H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki}))^T P_i + P_i B_i U_v H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki} = \\ M_{ki}^T F_{ki}^T(t) H_{ki}^T U_v B_i^T P_i + P_i B_i U_v H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki} \leq \\ \varepsilon_i P_i B_i U_v H_{ki} H_{ki}^T U_v B_i^T P_i + \varepsilon_i^{-1} M_{ki}^T M_{ki} \end{aligned}$$

成立. 因此

$$\Gamma V(x(t), i) - \alpha V(x(t), i) \leq \sum_{v=1}^{2m} \eta_v x^T(t) \Pi_{ij} x(t),$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \Pi_{ij} = & \varepsilon_{1i} P_i B_i U_v H_{ki} H_{ki}^T U_v B_i^T P_i + \varepsilon_{1i}^{-1} M_{ki}^T M_{ki} + \\ & (A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i)^T P_i + P_i (A_i + \\ & B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i) + W_i^T P_i W_i - \alpha P_i + \\ & \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} (P_j - Q_i) + \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} (P_j - Q_i). \end{aligned}$$

对于 $\forall j \in S_{uk}^i$, 如果 $i \in S_k^i$, 条件(4)~(5)和 $\pi_{ij} \geq 0 (\forall i, j \in S, i \neq j)$ 得到 $\Pi_{ij} < 0$. 另一方面, 对于 $\forall j \in S_{uk}^i$, 如果 $i \in S_{uk}^i$, 由条件(4)~(6)和

$$\pi_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij} < 0, \text{ 同样能够得到 } \Pi_{ij} < 0.$$

其次, 对 $\Gamma V(x(t)) < \alpha V(x(t)), t \in [0, T]$ 两边积分得

$$E\{V(x(t))\} < V(x(0)) + \alpha \int_0^t E\{V(x(s))\} ds, \quad (11)$$

即

$$E\{V(x(t))\} < V(x(0)) e^{\alpha t}. \quad (12)$$

定义 $\bar{P}_i = R_i^{-1/2} P_i R_i^{-1/2}$ 并记 $\lambda_{\max}(\bar{P}_i)$ 和 $\lambda_{\min}(\bar{P}_i)$ 为 \bar{P}_i 的最大和最小特征值, 则

$$\begin{aligned} E\{V(x(t))\} = & E\{x^T(t) R_i^{1/2} \bar{P}_i R_i^{1/2} x(t)\} \leq \\ & \lambda_{\min}(\bar{P}_i) E\{x^T(t) R_i x(t)\}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x(0)) e^{\alpha t} = & x^T(0) R_i^{1/2} \bar{P}_i R_i^{1/2} x(0) e^{\alpha t} \leq \\ & \lambda_{\max}(\bar{P}_i) x^T(0) R_i x(0) e^{\alpha t} \leq \lambda_{\max}(\bar{P}_i) c_1 e^{\alpha t}. \quad (14) \end{aligned}$$

所以可以得到

$$E\{x^T(t) R_i x(t)\} \leq \frac{c_1 e^{\alpha t} \lambda_{\max}(\bar{P}_i)}{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)} < c_2. \quad (15)$$

因此, 系统是有限时间稳定的. 由条件(8), 如果 $x(t) \in \xi(P_i)$, 得到 $x(t) \in \psi(F_i)$.

证毕.

2.2 有限时间状态反馈控制器设计和吸引域估计

下面设计控制器并得到系统均方意义下吸引域估计值. 假设如下最优化问题:

$$\begin{aligned} \sup \quad & a \\ & P_i > 0, K_i, F_i, Q_i, \varepsilon_i; \\ \text{s. t. } & \textcircled{1} a x_0^g \in n_{i=1}^N \xi(P_i), g=1, 2, \dots, \rho, \\ & \textcircled{2} \text{式(4)~(6)~(8)}, \\ & \textcircled{3} |F_{iq} x(t)| \leq 1, \forall x(t) \in n_{i=1}^N \xi(P_i). \end{aligned} \quad (16)$$

其中 F_{iq} 代表 F_i 的第 q 行. 这里假设初始状态空间在一凸集中, 表示为 $X_0 \in C_o\{x_0^1, \dots, x_0^\rho\}$, 其中 x_0^1, \dots, x_0^ρ 是给定的在 \mathbf{R}^n 中的初始状态向量. 如果 a 最大值 $a_{\max} > 1$, 则初始状态 x_0 在均方意义下的吸引域内.

令 $\beta = a^{-2}$, $X_i = P_i^{-1}$, $Y_i = K_i X_i$, $D_i = F_i X_i$, $V_i = X_i Q_i X_i$, 注意问题(16)中的 $\textcircled{1}$ 等价于 $a^2 (x_0^g)^T P_i x_0^g \leq 1 (g=1, 2, \dots, \rho)$. 应用 Schur 补引理, 可得到

$$\begin{bmatrix} -\beta & (x_0^g)^T \\ * & -X_i \end{bmatrix} \leq 0, g=1, \dots, \rho. \quad (17)$$

利用同样的方法, 问题(16)中的 $\textcircled{3}$ 等价于

$$\begin{bmatrix} -X_i & R_{iq}^T \\ * & -I \end{bmatrix} \leq 0, q=1, \dots, m. \quad (18)$$

其中 R_{iq} 代表 R_i 的第 q 行.

对式(4)两边同时乘以对角矩阵 $\text{diag}\{X_i, I, I\}$, 可以得到

$$\begin{bmatrix} \Pi_2 & X_i M_{ki}^T & \varepsilon_i B_i U_v H_{ki} \\ * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_2 = & \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{A}_i^T + \boldsymbol{Y}_i^T \boldsymbol{U}_v \boldsymbol{B}_i^T + \boldsymbol{D}_i^T \boldsymbol{U}_v^- \boldsymbol{B}_i^T + \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}_i + \\ & \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{U}_v \boldsymbol{Y}_i + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{U}_v^- \boldsymbol{D}_i + \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{W}_i^T \boldsymbol{X}_i^{-1} \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{X}_i - \\ & \alpha \boldsymbol{X}_i + \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_j^{-1} \boldsymbol{X}_i - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} \boldsymbol{V}_i. \end{aligned}$$

下面的分析将不等式 (19) 分成两种情况.

情况 1 当 $i \in S_k^i$ 应用 Schur 补引理 不等

式 (19) 中相应参数为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_3 & \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{M}_{ki}^T & \varepsilon_i \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{U}_v \boldsymbol{H}_{ki} & \boldsymbol{\Pi}_4 \\ * & -\varepsilon_i \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\varepsilon_i \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\boldsymbol{\Pi}_5 \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (20)$$

其中：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_3 = & \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{A}_i^T + \boldsymbol{Y}_i^T \boldsymbol{U}_v \boldsymbol{B}_i^T + \boldsymbol{D}_i^T \boldsymbol{U}_v^- \boldsymbol{B}_i^T + \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}_i + \\ & \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{Y}_v \boldsymbol{Y}_i + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{U}_v^- \boldsymbol{D}_i - \alpha \boldsymbol{X}_i - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} \boldsymbol{V}_i + \end{aligned}$$

$$\pi_{ii} \boldsymbol{X}_i ;$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_4 = & [\boldsymbol{X}_i \boldsymbol{W}_i^T, \sqrt{\pi_{ik_1}} \boldsymbol{X}_i, \dots, \sqrt{\pi_{ik_{r-1}}} \boldsymbol{X}_i, \\ & \sqrt{\pi_{ik_{l+1}}} \boldsymbol{X}_i, \dots, \sqrt{\pi_{ik_m}} \boldsymbol{X}_i]; \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_5 = \text{diag}\{\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_{k_1}^i, \dots, \boldsymbol{X}_{k_{r-1}}^i, \boldsymbol{X}_{k_{l+1}}^i, \dots, \boldsymbol{X}_{k_m}^i\}.$$

情况 2 当 $i \notin S_k^i$ 应用补 Schur 引理 不等式

(19) 中相应参数为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_6 & \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{M}_{ki}^T & \varepsilon_i \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{U}_v \boldsymbol{H}_{ki} & \boldsymbol{\Pi}_7 \\ * & -\varepsilon_i \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\varepsilon_i \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\boldsymbol{\Pi}_8 \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (21)$$

其中：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_6 = & \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{A}_i^T + \boldsymbol{Y}_i^T \boldsymbol{U}_v \boldsymbol{B}_i^T + \boldsymbol{D}_i^T \boldsymbol{U}_v^- \boldsymbol{B}_i^T + \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}_i + \\ & \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{U}_v \boldsymbol{Y}_i + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{U}_v^- \boldsymbol{D}_i - \alpha \boldsymbol{X}_i + \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} \boldsymbol{V}_i ; \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_7 = [\boldsymbol{X}_i \boldsymbol{W}_i^T, \sqrt{\pi_{ik_1}} \boldsymbol{X}_i, \dots, \sqrt{\pi_{ik_m}} \boldsymbol{X}_i];$$

$$\boldsymbol{\Pi}_8 = \text{diag}\{\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_{k_1}^i, \dots, \boldsymbol{X}_{k_m}^i\}.$$

对式 (5) 两边同乘 \boldsymbol{X}_i 可得

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{V}_i & \boldsymbol{X}_i \\ * & -\boldsymbol{X}_j \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad j \in S_{uk}^i \quad j \neq i. \quad (22)$$

对式 (6) 两边同乘 \boldsymbol{X}_i 可得

$$\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{V}_j > \mathbf{0} \quad j \in S_{uk}^i \quad j = i. \quad (23)$$

定义 $\tilde{\boldsymbol{X}}_i = \tilde{\boldsymbol{P}}_i^{-1} = \boldsymbol{R}_i^{-1/2} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{R}_i^{-1/2}$ 和 考虑

$$\lambda_{\max}(\tilde{\boldsymbol{X}}_i) = \frac{1}{\lambda_{\min}(\tilde{\boldsymbol{P}}_i)}, \text{ 可以得到}$$

$$\lambda_1 < \lambda_{\min}(\tilde{\boldsymbol{P}}_i) \quad \lambda_{\max}(\tilde{\boldsymbol{P}}_i) > 1 \quad (24)$$

和

$$-\mathrm{e}^{-\alpha T} c_2 + \frac{c_1}{\lambda_1} < 0. \quad (25)$$

式 (24) 等价于

$$\lambda_1 \boldsymbol{R}_i^{-1} < \boldsymbol{X}_i < \boldsymbol{R}_i^{-1}; \quad (26)$$

式 (25) 等价于

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-\alpha T} c_2 & \sqrt{c_1} \\ \sqrt{c_1} & -\lambda_1 \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (27)$$

综上所述可以得到下列优化问题：

$$\left. \begin{aligned} & \inf \quad \beta \\ & \boldsymbol{X}_i > \mathbf{0} \quad \boldsymbol{Y}_i \quad \boldsymbol{D}_i \quad \boldsymbol{V}_i \quad \varepsilon_i \\ \text{s. t. LMIs 式 (17) } \sim (18) \text{ 式 (20) } \sim (23), \\ & \text{式 (26) } \sim (27). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

如果 $\beta_{\min} < 1$ ($a_{\max} > 1$) 则初始条件在吸引域内并且系统 (3) 是有限时间稳定的. 控制器增益的表达式为 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{X}_i^{-1}$.

3 数值例子

四模态随机 Markov 跳变系统参数如下：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 2.4 & -0.6 \\ 0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{W}_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.5 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_{k1} = [0.5 \ 0] \quad \boldsymbol{M}_{k1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 2.1 & -0.2 \\ 0.2 & 1.5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{W}_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_{k2} = [1 \ 0] \quad \boldsymbol{M}_{k2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 3.1 & 0.1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_{k3} = [1 \ 0.5] \quad \boldsymbol{M}_{k3} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{bmatrix} 3.1 & 0.4 \\ 0.3 & 1.2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_{k4} = [0.5 \ 0] \quad \boldsymbol{M}_{k4} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_4 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

令 $c_1 = 1$, $c_2 = 10$, $T = 10\text{s}$, $\alpha = 0.01$. 选择初始条件 $\boldsymbol{x}_0 = [-1 \quad 1.5]^T$, $\boldsymbol{g}_0 = 2$. 转移概率矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} -1.2 & ? & ? & 0.2 \\ ? & ? & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.6} \\ \mathbf{0.3} & ? & -1.0 & ? \\ \mathbf{0.5} & ? & 0.9 & ? \end{bmatrix}.$$

求解优化问题 (28) 可得 $\beta = 0.153 \ 0 < 1$ 和状态反馈控制器增益参数如下：

$$\boldsymbol{K}_1 = [-1.863 \ 5 \quad -4.966 \ 1];$$

$$\boldsymbol{K}_2 = [-1.438 \ 9 \quad -1.598 \ 5];$$

$$\boldsymbol{K}_3 = [-1.647 \ 8 \quad -3.365 \ 2];$$

$$\boldsymbol{K}_4 = [-1.603 \ 8 \quad -2.468 \ 4].$$

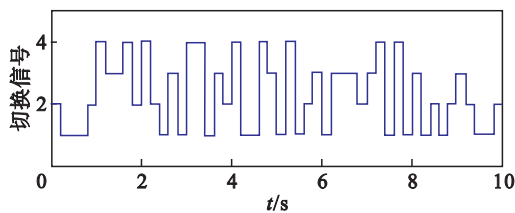


图 1 跳变模式
Fig. 1 Jumping mode

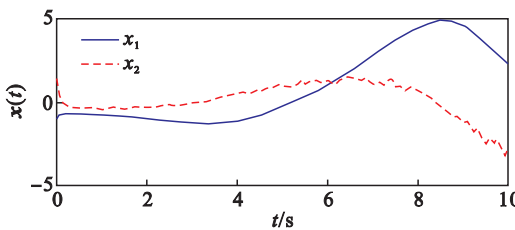


图 2 状态轨迹
Fig. 2 State trajectories

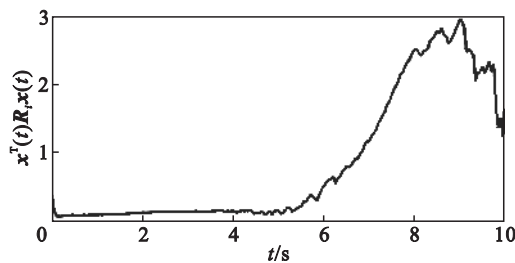


图 3 $x^T(t)R_ix(t)$ 的轨迹
Fig. 3 Evolution of $x^T(t)R_ix(t)$

图 1 ~ 图 3 为系统模态、状态轨迹和轨迹 $x^T(t)R_ix(t)$ 。从仿真图看出,所求解的非脆弱状态反馈控制器使得初始状态属于凸集 $C_o\{x_0^1\}$ 的系统 (3) 有限时间稳定。

4 结 语

本文针对执行器饱和 Markov 跳变系统的非脆弱有限时间镇定,设计了非脆弱有限时间状态反馈控制器。通过线性矩阵不等式的方式,实现了控制器和吸引域最大化的求解。

参考文献：

[1] Krasovskii N N ,Lidskii E A. Analytical design of controllers in systems with random attributes[J]. *Automation and Remote Control* ,1961 22(3) :1289 – 1294.

[2] Ge X H ,Han Q L. Distributed fault detection over sensor networks with Markovian switching topologies [J]. *International Journal of General Systems* ,2014 ,43(3/4) : 305 – 318.

[3] Shen L J ,Buscher U. Solving the serial batching problem in job shop manufacturing systems[J]. *European Journal of Operational Research* 2012 221(1) :14 – 26.

[4] Zhang Y ,He Y ,Wu M ,et al. Stabilization for Markovian jump systems with partial information on transition probability based on free-connection weighting matrices[J]. *Automatica* 2011 47(1) :79 – 84.

[5] Liang J L ,Lam J ,Wang Z. State estimation for Markov-type genetic regulatory networks with delays and uncertain mode transition rates[J]. *Physics Letter A* ,2009 ,373 (47) : 4328 – 4337.

[6] Cao Y ,Lin Z. Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function[J]. *Automatica* 2003 39(7) :1235 – 1242.

[7] Zuo Z Q ,Ho D W C ,Wang Y J. Fault tolerant control for singular systems with actuator saturation and nonlinear perturbation[J]. *Automatica* 2010 46(3) :569 – 576.

[8] Zhang L X ,Boukas E K. Delay-range-dependent control synthesis for time-delay systems with actuator saturation [J]. *Automatica* 2008 44(10) :2691 – 2695.

[9] Liu H P ,Boukas E K ,Sun F C ,et al. Controller design for Markov jump systems subject to actuator saturation [J]. *Automatica* 2006 42(3) :459 – 465.

[10] Li J N ,Pan Y J ,Su H Y ,et al. Stochastic reliable control of a class of networked control systems with actuator faults and input saturation [J]. *International Journal of Control , Automation and Systems* 2014 12(3) :564 – 571.

[11] Song G F ,Chen F ,Xu S Y ,et al. Disturbance tolerance and rejection of discrete-time stochastic systems with saturating actuators[J]. *Journal of the Franklin Institute* ,2013 ,350 (6) :1488 – 1499.

[12] Zhang M S. Robust stabilization for uncertain stochastic multiple time-delay systems with actuator saturation :an LMI approach[J]. *Procedia Engineering* 2012 29 :935 – 939.

[13] Yang R M ,Wang Y Z. Finite-time stability analysis and H -infinity control for a class of nonlinear time-delay Hamiltonian systems [J]. *Automatica* , 2013 , 49 (2) : 390 – 401.

[14] He S P. Observer-based finite-time control of time- delayed jump systems[J]. *Applied Mathematics and Computation* , 2010 217(6) :2327 – 2338.

[15] Zhao J J ,Shen H ,Li B ,et al. Finite-time H -infinity control for a class of Markovian jump delayed systems with input saturation[J]. *Nonlinear Dynamics* , 2013 , 73 (1/2) : 1099 – 1110.

[16] Luan X L ,Liu F ,Shi P. Finite-time filtering for non-linear stochastic systems with partially known transition jump rates [J]. *IET Control Theory and Applications* ,2010 ,4(5) : 735 – 745.