

doi : 10.3969/j.issn.1005-3026.2016.09.013

考虑流体影响的水轮机叶轮固有频率

李 鹤,王天任,韩 萍,闻邦椿
(东北大学 机械工程与自动化学院,辽宁 沈阳 110819)

摘 要 : 将工作时水轮机叶轮简化为浸在流体中的旋转圆盘,建立了流体中圆盘振动微分方程,并考虑边界条件对其固有频率的影响.分别研究了不同圆盘转速、不同流体深度以及不同流体密度对固有频率的影响.研究表明,与真空中圆盘的固有频率相比,沉浸在流体中的圆盘的固有频率降低.当浸在流体中的圆盘发生旋转时,圆盘的模态由驻波变为行波,不同的旋转方向将对应两个不同的固有频率值.当流体深度减小时,固有频率值降低,流体密度越大,固有频率越小.

关 键 词 : 水轮机;叶轮;固有频率;流体深度;流体密度

中图分类号:TK 730.3 文献标志码:A 文章编号:1005-3026(2016)09-1274-04

Natural Frequency of Turbine Impeller Considering Fluid Effects

LI He , WAGN Tian-ren , HAN Ping , WEN Bang-chun
(School of Mechanical Engineering & Automation , Northeastern University , Shenyang 110819 , China.
Corresponding author : LI He , E-mail : hli@mail.neu.edu.cn)

Abstract : The turbine impeller was simplified to a disk immersed in fluid , and the vibration differential equation of the disk was established with considering the effect of boundary conditions on natural frequency of the disk. The influence of different disk speed , fluid depth and fluid density on the natural frequency was studied. The results show that the natural frequency of the disk immersed in fluid decreased comparing with the natural frequency of the disk in vacuum. When the disk in fluid is rotated , the mode of the disk is changed from standing wave to traveling wave. Different rotation directions correspond to two different natural frequencies. As the fluid depth reduces , the value of natural frequency decreases. The higher the fluid density is , the lower the natural frequency is.

Key words : turbine ; impeller ; natural frequency ; fluid depth ; fluid density

水轮机叶轮的振动对水轮机的性能和叶轮的寿命有着重要的影响.尤其是当激振频率与叶轮的固有频率相等时,将发生严重共振,进而造成叶轮工作时的不稳定或者疲劳失效等问题^[1].为了避免出现共振现象^[2],必须对叶轮的固有频率进行准确的估计.但是考虑到水轮机工作时叶轮是旋转的,并且由于叶轮和流体及静止叶片之间存在相互作用,影响叶轮的固有频率的因素变得非常复杂.近些年来,采用有限元方法来解决流固耦合问题较为流行^[3],该方法能够比较有效地计算结构的固有频率,但是它需要更多的计算机资源,而且只能在设计后期,叶轮的结构设计完成后才能计算其固有频率.文献[4-8]等采用简化模型来计算结构的固有频率,该方法简单直观,而且可以在叶轮的初步设计阶段快速估计叶轮的固有频率.文献[4]研究了流体中圆盘的固有频率,但是它没有考虑边界条件的影响.

文献[5]研究了简支梁在流体中的振动问题,文献[6]研究了圆柱体在流体中的动力学特性,文献[7]研究了流体中悬臂板的振动,但是均与水轮机叶轮模型相差较大.文献[8]虽然研究了无限流体域中圆盘的振动问题,但是没有考虑

流体旋转的影响等等。

本文以水轮机和叶轮结构为背景,对其固有频率进行估计。首先将工作时的叶轮简化为浸在流体中的圆盘模型;然后建立流体中圆盘的振动微分方程,最后分析了不同圆盘转速和边界条件对其固有频率的影响。

1 理论模型

1.1 空气中圆盘的固有频率

基于薄板理论和小变形,并且忽略转动惯量和剪切变形的影响^[9],建立空气中圆盘的振动微分方程:

$$\rho_D h_D \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + D \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right] \omega = 0. \quad (1)$$

考虑到中心固定,周边自由度的边界条件,因此,环形盘的固有频率为

$$f_{nm} = \frac{\lambda_{nm}^2}{r_{out}^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_D h_D}}. \quad (2)$$

式中 ρ_D 和 h_D 分别为圆盘的密度和厚度; r_{out} 为环形盘的外径; λ_{nm} 为常数,可由文献[9]中查到; D 为圆盘的弯曲刚度, $D = \frac{E \times h^3}{12 \times (1 - \mu^2)}$, 其中, E 和 μ 分别为材料的弹性模量和泊松比。

1.2 流体中圆盘的固有频率

如图 1 所示,考虑圆盘在充满流体的圆柱形容器中振动,容器的壁是刚性的,流体是无黏性的,并且认为圆盘相对于流体以恒定的转速 ω 旋转,因此有如下关系:

$$\theta = \varphi + \omega t. \quad (3)$$

其中 θ 和 φ 分别为圆盘和流体相对于静止参考系的夹角。

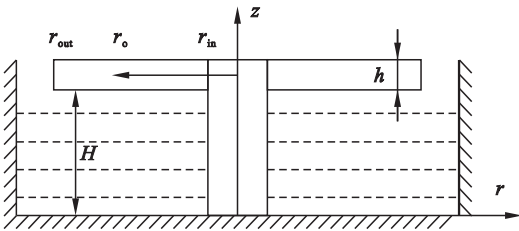


图 1 叶轮简化模型
Fig. 1 Simplified impeller model

用平均半径 r_0 简化方程(1),并将流体对圆盘的作用考虑为压力的影响^[5],因此有

$$\rho_D h_D \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{D^*}{r_0^4} \frac{\partial^4 f}{\partial \theta^4} = p. \quad (4)$$

式中 D^* 与圆盘的材料和几何形状有关,它与 D

具有相同的量纲; p 为对圆盘的动压力; $r_0 = \sqrt{r_{in} \times r_{out}}$, r_{in} 和 r_{out} 分别为圆盘的内径和外径。

方程(4)的解为

$$f = \sum_{n=\pm 2}^{\pm \infty} A_n e^{in\theta} e^{if_n t}. \quad (5)$$

流体的速度势 ϕ 应满足拉普拉斯方程^[4]:

$$\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

考虑流体在刚性表面的速度为零,流体在圆盘表面的速度为圆盘的振动速度,因此有

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=H_1} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (8)$$

利用方程(5)和边界条件(7)(8)可以得到流体的速度势为

$$\phi = \sum_{n=\pm 1}^{\pm \infty} \frac{j r_0 A_n}{n} (f_n + n \omega) \times \coth \left(\frac{n H_1}{r_0} \right) \cdot e^{in\varphi} e^{j(f_n + n \omega)t}. \quad (9)$$

流体对圆盘的动压力为^[10]

$$p = -\rho_F \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho_F r_0 \sum_{n=\pm 1}^{\pm \infty} \frac{A_n}{n} \times (f_n + n \omega)^2 \coth \left(\frac{n H_1}{r_0} \right) \cdot e^{in\theta} e^{if_n t}. \quad (10)$$

将方程(10)带入到方程(4)中,可以得到

$$\left(\left[\coth \left(\frac{n H_1}{r_0} \right) \right] \frac{\rho_F r_0}{n} + \rho_D h_D \right) f_n^2 + \left(\coth \left(\frac{n H_1}{r_0} \right) \cdot 2 \omega \cdot \rho_F r_0 \right) f_n + \left(-\frac{D^*}{r_0^4} n^4 + \left[\coth \left(\frac{n H_1}{r_0} \right) n^2 \omega^2 \right] \frac{\rho_F r_0}{n} \right) = 0. \quad (11)$$

方程(11)为流体中旋转圆盘的固有频率的计算方法,其中 n 为节径数,符号代表行波的旋转方向。“+”代表行波的旋转方向与圆盘的旋转方向相同,“-”代表两者方向相反。 ρ_F 为流体的密度,如令 $\rho_F = 0$,得到

$$(\rho_D h_D) f_n^2 + \left(-\frac{D^*}{r_0^4} n^4 \right) = 0. \quad (12)$$

方程(12)可以用来计算空气中圆盘的固有频率,因此 D^* 可以由方程(2)进行校验。

2 固有频率分析及讨论

2.1 流体圆盘系统参数

圆盘材料为不锈钢,内径 $d_{in} = 40$ mm,外径 $d_{out} = 400$ mm, $\rho_D = 7\,800$ kg/m³, $E = 2 \times 10^{11}$ Pa,

$h_D = 5\text{ mm}$, $\mu = 0.3$. 流体为水 , 流体深度 $H = 30\text{ mm}$ $\rho_F = 1\,000\text{ kg/m}^3$.

2.2 圆盘转速对固有频率的影响

利用已知参数进行仿真 , 在改变圆盘转速的情况下 , 分别计算空气中圆盘的固有频率和沉浸在流体中的圆盘固有频率 , 计算结果如表 1 和表 2 所示.

表 1 空气中圆盘的固有频率
Table 1 Natural frequency of disk in air

节径 n	圆盘转速/Hz		
	0	3	6
-2	171.32	171.32	171.32
+2	171.32	171.32	171.32
-3	385.47	385.47	385.47
+3	385.47	385.47	385.47

表 2 水中圆盘的固有频率
Table 2 Natural frequency of disk in water

节径 n	圆盘转速/Hz						
	0	1	2	3	4	5	6
-2	118.31	119.35	120.38	121.41	122.43	123.43	124.43
+2	118.31	117.26	116.20	115.13	114.06	112.97	111.88
-3	304.06	305.19	306.31	307.43	308.53	309.64	310.73
+3	304.06	302.92	301.78	300.63	299.47	298.30	297.13

通过表 1 可知 , 当 $n = \pm 2$ 时 , 圆盘的固有频率值相同 , 说明在空气中圆盘的固有频率为单值 , 圆盘的模态为驻波. 当圆盘的转速改变时 , 圆盘的同阶固有频率值仍然相同 , 说明旋转不影响空气中圆盘的固有频率. 当 $n = \pm 3$ 时结论相同. 通过表 2 可知 , 圆盘在流体中旋转的情况下 , $n = +2$ 和 $n = -2$ 出现了两个不同的固有频率值. 因此 , 当圆盘浸到流体中时 , 圆盘的模态由驻波变为行波 , 从而对应两个不同的固有频率值. 当 n 取负值时 , 圆盘的固有频率值随着圆盘的转速增加而变大 ; n 取正值时 , 圆盘的固有频率值随着圆盘的转速增加而减小. 对于 $n = \pm 3$ 得出的结论仍然相同. 对比表 1 和表 2 , 可知当圆盘沉浸在流体中时 , 圆盘的固有频率值降低. 综上 , 旋转对于沉浸在流体中圆盘的固有频率影响是非常重要的.

2.3 流体深度对固有频率的影响

流体深度影响水轮机结构中尾水管的设计参数 , 因此本文研究了在不同流体深度时 , 圆盘固有频率的变化. 通过确定圆盘转速在 3 Hz 时 , 改变流体深度 H 来研究沉浸在流体中圆盘的固有频率特性. 图 2a , 图 2b 分别显示了流体深度 H 在 30 ~ 100 mm 的二阶、三阶固有频率的变化. 其中纵坐标被正则化为无量纲常数 f_H , 代表流体深度为 H 时圆盘的固有频率 , $f_{0.03}$ 代表流体深度为 0.03 m 时圆盘的固有频率.

由图 2a 可知 , 当流体深度小于 0.08 m 时 , 对于二阶固有频率值明显的上升趋势 ; 当流体深度大于 0.08 m 时 , 固有频率值变化缓慢 , 最终趋于稳定. 对于图 2b , 流体深度小于 0.06 m 时 , 三阶固有频率值明显变大 , 当流体深度大于 0.06 m 时 ,

固有频率值逐渐趋于稳定.

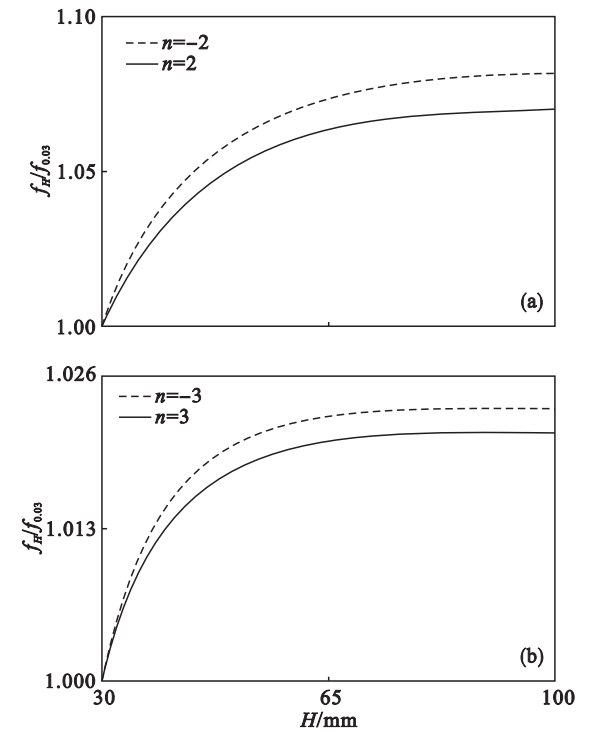


图 2 不同深度流体中的固有频率
Fig. 2 Natural frequency in different depth fluids
(a)—二阶 ; (b)—三阶.

由图 2 可知 , 随着流体深度的增加 , 沉浸在流体中圆盘的各阶固有频率值起初均有所增加 , 但是当深度达到一定值时 , 圆盘的各阶固有频率值逐渐趋于稳定. 而且模态阶数越大时 , 圆盘固有频率趋于稳定的速度越快.

2.4 流体密度对固有频率的影响

考虑水轮机叶轮经常工作在不同流体等复杂工作环境 , 因此研究不同流体的密度对叶轮固有

频率的影响是非常重要的. 本文研究了在圆盘转速为 3 Hz 时, 叶轮在三种不同种类的流体中, 随着深度 H 改变固有频率的变化. 三种流体和其密度分别为: 水 $\rho_{\text{水}} = 1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; 植物油 $\rho_{\text{油}} = 906.4\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; 丙酮 $\rho_{\text{丙酮}} = 778.0\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. 利用已知参数, 编写计算机程序, 仿真结果如图 3 所示. 其中图 3a、图 3b 分别显示了浸在三种不同密度流体中圆盘的二阶、三阶固有频率值随着深度 H 的变化关系.

由图 3a、3b 可知, 发现对于不同的流体密度, 圆盘的各阶固有频率值相差较大. 当流体深度相同时, 圆盘在三种液体中的固有频率有以下关系, 水中固有频率值最小, 丙酮中固有频率值最大, 植物油中的固有频率介于两者之间. 可见, 流体密度对圆盘的固有频率具有很大影响, 当流体深度相同时, 流体的密度越大沉浸在流体中的圆盘固有频率值越小.

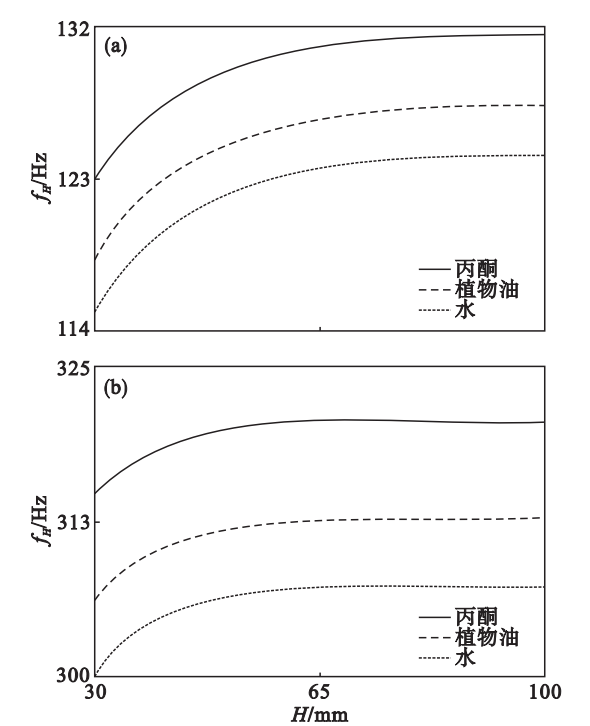


图 3 不同密度流体中的固有频率

Fig. 3 Natural frequency in fluid with different densities
(a)—二阶; (b)—三阶.

3 结 论

1) 空气中圆盘的固有频率值不受圆盘转速的影响, 此时圆盘的模态为驻波. 浸在流体中的圆盘固有频率相比于空气中的固有频率降低. 并且当沉浸在流体中的圆盘发生旋转时, 圆盘的模态由驻波变为行波, 同时对应两个不同的固有频率值. 可见对于浸在流体中的圆盘, 旋转将对其固有

频率产生很大的影响.

2) 不同的流体深度对圆盘的固有频率也将产生一定的影响. 随着流体深度的增加, 沉浸在流体中圆盘的固有频率起初有所增加, 但是当深度达到一定值时, 圆盘的固有频率逐渐趋于稳定.

3) 流体密度也是影响流体中圆盘固有频率的一项重要因素. 结论表明, 在其他条件相同时, 沉浸在流体中圆盘的固有频率随着流体密度的变大而变小.

参考文献：

[1] Eduard E ,Carne V. Failure investigation of a large pump-turbine runner[J]. *Engineering Failure Analysis* ,2012 ,2 (23) 27 – 34.

[2] Eduard E ,Carne V. Condition monitoring of pump-turbines : new challenges[J]. *Measurement* ,2015 ,67(2) :151 – 163.

[3] 陈锋,王春江,周岱. 流固耦合理论与算法评述[J]. *空间结构* ,2012 ,14(8) 55 – 63.

(Chen Feng ,Wang Chun-jiang ,Zhou Dai. Review of theory and numerical methods of fluid-structure interaction[J]. *Spatial Structures* ,2012 ,14(8) 55 – 63.)

[4] Kubota Y ,Ohashi H. A study on the natural frequencies of hydraulic pumps[J]. *Computers & Fluids* ,1991 ,13(10) : 589 – 593.

[5] 徐博侯,王清. 简支梁在无限大不可压缩流体和声学流体中的固有振动问题[J]. *振动工程学报* ,1990 ,3(1) : 10 – 17.

(Xu Bo-hou ,Wang Qing. Natural vibration of simple beam in infinite incompressible and acoustic fluid[J]. *Journal of Vibration Engineering* ,1990 ,3(1) :10 – 17.)

[6] 袁振伟,褚福磊,王三保. 横向振动圆柱体在流体中的动力学特性[J]. *工程力学* ,2006 ,23(8) :49 – 52.

(Yuan Zhen-wei ,Chu Fu-lei ,Wang San-bao. Dynamic characteristics of a lateral vibrating cylinder immersed in unbounded fluid[J]. *Engineering Mechanics* ,2006 ,23(8) : 49 – 52.)

[7] Rodriguez C G ,Flores P ,Pierart F G. Capability of structural-acoustical FSI numerical model to predict natural frequencies of submerged structures with nearby rigid surfaces [J]. *Computers & Fluids* ,2012 ,64(12) :117 – 126.

[8] Askari E ,Jeong K H ,Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface[J]. *Journal of Sound and Vibration* ,2013 ,3(32) : 3064 – 3085.

[9] 屈维德. 机械振动手册[M]. 北京: 机械工业出版社,1992 : 201 – 218.

(Qu Wei-de. Manual of mechanical vibration[M]. Beijing : China Machine Press ,1992 :201 – 218.)

[10] Harris C M. Shock and vibration handbook[M]. New York : McGraw-Hill ,1995 :804.