

非线性广义时滞 Markov 跳变系统的 H_∞ 滑模控制

杨冬梅, 杜玲秀, 祝春霞

(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 研究了一类转移速率部分未知的广义时滞 Markov 跳变系统的 H_∞ 滑模控制问题. 首先, 对广义时滞 Markov 跳变系统设计积分型滑模面, 并求出对应的等效控制器. 之后, 构建 Lyapunov 泛函, 通过线性矩阵不等式方法得到闭环系统随机容许且满足 H_∞ 性能 γ 的充分条件, 运用加减项方法以及引入自由权矩阵, 使得到的结果降低了保守性; 对滑模力学分析, 设计了滑模控制器, 使得系统能在有限时间内到达滑模面上. 最后, 通过数值算例与仿真验证了理论的可行性.

关 键 词: Markov 跳变系统; 时滞系统; 滑模控制; 广义系统; 线性矩阵不等式

中图分类号: O 1

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2024)02-0153-07

H_∞ Sliding Mode Control for Nonlinear Generalized Time-delay Markov Jump Systems

YANG Dong-mei, DU Ling-xiu, ZHU Chun-xia

(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: DU Ling-xiu, E-mail: 1664452212@qq.com)

Abstract: The sliding mode control problem for a class of generalized time-delay Markov jump systems with partially unknown transition rates is studied. Firstly, an integral sliding mode surface is designed for the generalized time-delay Markov jump system, and the corresponding equivalent controller is obtained. Then, a Lyapunov functional is constructed, and the sufficient conditions for the stochastic admissibly and satisfying H_∞ criteria γ performance of the closed-loop system are obtained using linear matrix inequality method. The addition and subtraction term method and the free weight matrix are used to reduce the conservatism of the obtained results. Based on the analysis of sliding mode dynamics, a sliding mode controller is designed so that the system can reach the sliding mode surface in finite time. Finally, the feasibility of the theory is verified by numerical examples and simulations.

Key words: Markov jump system; time delay system; sliding mode control; generalized system; linear matrix inequality

广义系统也被称为奇异系统或微分代数系统, 其理论研究成果丰富, 且广泛应用在经济模型、电力系统、航天航空等领域. 在随机过程中, 不同模态之间的变换是遵循 Markov 过程的, 广义 Markov 跳变系统模型能够全面地反映实际过程中的物理属性, 在实际工程中应用广泛. 广义半 Markov 跳变系统也受到了学者的关注^[1-2]. 对于 Markov 跳变系统, 文献[3]引入自由权矩阵和李雅普诺夫函数, 给出了一种时变时滞广义

Markov 跳变系统的无源性控制的线性矩阵不等式的充分条件. 文献[4]利用延迟子区间分解方法研究了时滞广义 Markov 跳变系统的控制问题. 文献[5]研究了具有状态时滞和不确定性的广义 Markov 跳变系统的时滞依赖鲁棒稳定性问题. 文献[6]提出了一种时滞相关的有界实引理, 研究了具有时滞的广义 Markov 跳变系统的 H_∞ 滤波问题. 文献[7]给出了具有外部扰动的时变时滞广义离散 Markov 跳变系统容许的条件. 关于

转移速率完全已知的广义 Markov 跳变系统的稳定性问题^[8-9],一些学者也给出了相应的理论.文献[10]给出了具有一般不确定转移速率广义 Markov 跳变系统稳定性的条件.文献[11]研究了具有部分未知转移速率的广义 Markov 跳变系统的动态输出反馈稳定问题.对于转移速率部分未知的广义时滞 Markov 跳变系统研究相对较少^[12].因此,本文结合滑模控制理论,给出了带有部分未知转移速率的时滞广义 Markov 跳变系统 H_∞ 随机容许的条件,并设计了对应的滑模控制器,最后通过仿真验证了可行性和有效性.

1 问题描述

考虑如下非线性广义时滞 Markov 跳变系统:

$$\left. \begin{aligned} E\dot{x}(t) &= \bar{A}_{r(t)}x(t) + \bar{A}_{dr(t)}x(t-d(t)) + B_{\omega r(t)}\omega(t) + \\ &B_{r(t)}(u(t) + f(x(t), x(t-d(t)))) \\ z(t) &= C_{r(t)}x(t) + C_{dr(t)}x(t-d(t)) + D_{\omega r(t)}\omega(t), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \forall \theta \in [-d, 0]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中: $\bar{A}_{r(t)} = A_{r(t)} + \Delta A_{r(t)}$, $\bar{A}_{dr(t)} = A_{dr(t)} + \Delta A_{dr(t)}$; $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量; $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入; $\omega(t) \in \mathbf{R}^q$ 是属于 $L_2[0, +\infty)$ 的外部扰动; $f(x(t), x(t-d(t))) \in \mathbf{R}^m$ 是描述系统的匹配不确定性; $d(t)$ 是变时滞且满足 $0 \leq d(t) \leq d$ (d 为已知常数), $\dot{d}(t) \leq \mu < 1$; $z(t) \in \mathbf{R}^q$ 是受控输出; $\varphi(\theta)$ 是满足相容性条件的初始函数; $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为奇异矩阵. $\Delta A_{r(t)}$, $\Delta A_{dr(t)}$ 是描述系统未知的不匹配不确定性矩阵; $A_{r(t)}$, $A_{dr(t)}$, $B_{r(t)}$, $B_{\omega r(t)}$, $C_{r(t)}$, $C_{dr(t)}$, $D_{\omega r(t)}$ 为已知适当维数的矩阵; $r(t) (t \geq 0)$ 于有限状态集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 上取值的右连续 Markov 跳变系统过程, 基于 Markov 过程的特性; $\pi_{ij} > 0, (i \neq j)$ 为 t 时刻的状态 i 到 $t + \Delta t$ 时刻的状态 j 的转移速率, 且满足 $\pi_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij} < 0$. 当 $\Delta t > 0$ 且

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ 时, 其形式如下:

$$P\{r(t + \Delta t) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & i \neq j; \\ 1 + \pi_{ii}\Delta t + o(\Delta t), & i = j. \end{cases}$$

针对跳跃过程的转移速率是部分未知的, 系统(1)具有 N 个操作模态的转移速率矩阵为

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \lambda & \pi_{13} & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \pi_{23} & \cdots & \pi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \pi_{N2} & \lambda & \cdots & \pi_{NN} \end{bmatrix}.$$

其中, λ 表示未知的转移速率. 对于 $i \in \mathbf{N}$, 集合 $U = U_k^i \cup U_{uk}^i$, 其中 $U_k^i \triangleq \{j: \pi_{ij} \text{ 已知}, j \in \mathbf{N}\}$,

$U_{uk}^i \triangleq \{j: \pi_{ij} \text{ 未知}, j \in \mathbf{N}\}$. 特别地, 当 $U_k^i \neq \emptyset$ 时, $U_k^i = \{k_1^i, \dots, k_m^i\}$. 其中 $k_m^i \in \mathbf{N}^+$ 表示矩阵 Π 的第 i 行中序号为 k_m^i 的第 m 个元素.

为方便表述, 当 $r(t) = i$ 时,

$$\begin{aligned} \Delta A_{r(t)} &= \Delta A_i, A_{dr(t)} = A_{di}, \Delta A_{dr(t)} = \Delta A_{di}, \\ B_{r(t)} &= B_i, B_{\omega r(t)} = B_{\omega i}, C_{r(t)} = C_i, \\ C_{dr(t)} &= C_{di}, D_{\omega r(t)} = D_{\omega i}. \end{aligned}$$

对系统(1)提出如下假设:

假设 1 $\Delta A_i, \Delta A_{di}$ 满足

$$[\Delta A_i, \Delta A_{di}] = H_i F_i(t) [L_i, L_{di}],$$

H_i, L_i, L_{di} 是具有适当维数的已知常矩阵, 对于 $i \in \mathbf{N}$, $F_i^T(t) F_i(t) \leq I$.

假设 2 $f(x(t), x(t-d(t))) \in \mathbf{R}^m$ 满足

$$\|f(x(t), x(t-d(t)))\| \leq \kappa_1 \|x(t)\| + \kappa_2 \|x(t-d(t))\|.$$

其中 $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$.

定义 1 对于广义时滞 Markov 跳变系统:

$$\left. \begin{aligned} E\dot{x}(t) &= A_i x(t) + A_{di} x(t-d(t)), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

1) 如果 (E, A_i) 与 $(E, A_i + A_{di})$ 是正则的, 无脉冲的, 则系统(2)是正则的、无脉冲的.

2) 对于任意的初始值 $(x(0), r(0))$, 有 $E\left\{\int_0^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt\right\} < \infty$ 成立, 则称系统(2)是随机稳定的.

3) 若同时满足 1) 和 2), 则称系统(2)是随机容许的.

定义 2 对任意 $\omega(t) \in L_2[0, +\infty)$, $\omega(t) \neq 0$, 给定常数 $\gamma > 0$, 在零初始条件即 $\varphi = 0$ 下满足

$$E\left\{\int_0^{+\infty} z^T(t) z(t) dt\right\} \leq \gamma^2 \int_0^{+\infty} \omega^T(t) \omega(t) dt.$$

则称系统是随机可容许的, 且满足 H_∞ 性能指标 γ .

引理 1^[6] 当系统(2)中的 $x(t-d(t)) = 0$ 是随机容许的, 当且仅当存在正定对称矩阵 $P_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和矩阵 $S_i \in \mathbf{R}^{(n-r) \times n}$ 能够对任意的 $i \in \mathbf{N}$ 满足如下不等式:

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij} E^T P_j E + \text{sym}(E^T P_i A_i + S_i R^T A_i) < 0. \quad (3)$$

其中, $R \in \mathbf{R}^{(n-r) \times n}$ 为列满秩矩阵且满足 $E^T R = 0$.

引理 2 若 M, N 是具有适当维数的实矩阵, 矩阵 $F_i(t)$ 满足 $F_i^T(t) F_i(t) \leq I$, 当且仅当存在常数 ε 使得以下不等式成立:

$$M F_i(t) N + N^T F_i^T(t) M^T \leq \varepsilon^{-1} M M^T + \varepsilon N^T N.$$

引理 3 由给定的对称矩阵

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix},$$

其中: S_1, S_2 和 S_3 是适当维数的矩阵, 下列式子等价:

- 1) $S < 0$;
- 2) $S_1 < 0, S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2 < 0$;
- 3) $S_3 < 0, S_1 - S_2 S_3^{-1} S_2^T < 0$.

针对系统(1), 设计滑模控制面为 $s(t) = G_i E x(t) - G_i \int_0^t [A_i x(\alpha) + A_{di} x(\alpha - d(\alpha)) + B_i K_i x(\alpha)] d\alpha$. 其中 $G_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 且 $G_i B_i$ 是非奇异的, $K_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是需要设计的矩阵.

通过滑模理论, 滑模函数沿着系统(1)的解的轨迹对时间 t 的导数 $\dot{s} = 0$ 得等效控制器:

$$u_{eq} = -(G_i B_i)^{-1} G_i [\Delta A_i x(t) + \Delta A_{di} x(t - d(t)) + B_{oi} \omega(t)] - f(x(t), x(t - d(t))) + K_i x(t). \quad (4)$$

将式(4)代入系统(1), 可得

$$\left. \begin{aligned} E \dot{x}(t) &= \tilde{A}_i x(t) + \tilde{A}_{di} x(t - d(t)) + \tilde{B}_{oi} \omega(t), \\ z(t) &= C_i x(t) + C_{di} x(t - d(t)) + D_{oi} \omega(t), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \forall \theta \in [-d, 0]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中: $\tilde{A}_i = \hat{A}_i + \tilde{G}_i \Delta A_i$; $\tilde{A}_{di} = \hat{A}_{di} + \tilde{G}_i \Delta A_{di}$; $\tilde{B}_{oi} = \tilde{G}_i B_{oi}$;

$$\hat{A}_i = A_i + B_i K_i; \tilde{G}_i = I - B_i (B_i G_i)^{-1} G_i.$$

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \Sigma_{11i} & \Sigma_{12i} & -W_i E & \Sigma_{14i} & dA_i^T Q_3 & C_i^T & dW_i & \Sigma_{18i} & L_i^T \\ * & -(1-\mu)Q & 0 & 0 & dA_{di}^T Q_3 & C_{di}^T & 0 & 0 & L_{di}^T \\ * & * & -Q_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & d\tilde{B}_{oi}^T Q_3 & D_{oi}^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -dQ_3 & 0 & 0 & \varepsilon_i dQ_3^T \tilde{G}_i H_i & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -dQ_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij} Q_{1i} - Q_2 < 0. \quad (8)$$

证明 首先证明系统是正则无脉冲的, 由于 $\text{rank}(E) = r < n$, 存在可逆矩阵 $M, N \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 使得

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M\tilde{A}_i N = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i1} & \tilde{A}_{i2} \\ \tilde{A}_{i3} & \tilde{A}_{i4} \end{bmatrix},$$

$$M^{-1} P_i M^{-1} = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ P_{i3} & P_{i4} \end{bmatrix}, N^T S_i = \begin{bmatrix} \bar{S}_{i1} \\ \bar{S}_{i2} \end{bmatrix}.$$

由 $E^T R = 0$, 矩阵 R 可以表示如下:

$$R = M^T \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{R} \end{bmatrix}.$$

其中 $\bar{R} \in \mathbf{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ 是非奇异矩阵.

2 主要结论

本文首先给出闭环系统(5)是 H_∞ 随机容许性的充分条件, 之后求出增益矩阵 K_i 的表达式, 最后给出系统(5)的滑模控制器的设计.

定理 1 对任意的时变时滞 $d(t)$, $0 \leq d(t) \leq d$, $0 < \mu < 1$, 如果存在适当维数的正定对称矩阵 P_i, Q, Q_{1i}, Q_2, Q_3 以及矩阵 S_i, W_i, M_i , 存在正标量 $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, N$ 使得以下不等式成立, 则系统(5)是 H_∞ 随机容许的.

$$E^T P_j E - E^T P_i E - M_i < 0, i \in U, j \in U_{uk}^i, j \neq i. \quad (6)$$

其中, $R \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$ 是满足 $E^T R = 0$ 的任意列满秩矩阵.

$$\Sigma_{11i} = \text{sym}(E^T P_i \hat{A}_i + S_i R^T \hat{A}_i + W_i E) + Q + Q_{1i} +$$

$$dQ_2 + \sum_{j \in U_k^i, j \neq i}^N \pi_{ij} (E^T P_j E - E^T P_i E - M_i) - v M_i,$$

$$v = \begin{cases} \pi_{ii}, i \in U_k^i \\ c, i \in U_{uk}^i \end{cases}, c = \min\{\pi_{ii}\},$$

$$\Sigma_{12i} = E^T P_i A_{di} + S_i R^T A_{di},$$

$$\Sigma_{14i} = E^T P_i \tilde{B}_{oi} + S_i R^T \tilde{B}_{oi},$$

$$\Sigma_{18i} = \varepsilon_i (E^T P_i + S_i R^T) \tilde{G}_i H_i,$$

由式(7)可得 $\Sigma_{11i} < 0$, 在 Σ_{11i} 两端左乘 N^T , 右乘 N , 整理后得

$$\tilde{A}_{i4}^T \bar{R} \bar{S}_{i2}^T + \bar{S}_{i2} \bar{R}^T \tilde{A}_{i4} < 0.$$

所以 \tilde{A}_{i4} 是非奇异的, (E, \tilde{A}_i) 是正则、无脉冲的.

分别用 $[I \ I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I \ I]$ 和 $[I \ I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I \ I]^T$ 乘式(7)的两端, 可得

$$\text{sym}((E^T P_i + S_i R^T)(\tilde{A}_i + \tilde{A}_{di})) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} E^T P_j E < 0.$$

于是得到 $(E, \tilde{A}_i + \tilde{A}_{di})$ 是正则无脉冲的, 由定

义 1 可知时滞系统(5)是正则无脉冲的.

构造如下所示的李雅普诺夫函数:

$$V(\mathbf{x}_t, r_t, t) = \sum_{i=1}^5 V_i(\mathbf{x}_t, r_t, t).$$

其中: $V_1(\mathbf{x}_t, r_t, t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \mathbf{E} \mathbf{x}(t)$;

$$V_2(\mathbf{x}_t, r_t, t) = \int_{t-d(t)}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(s) ds;$$

$$V_3(\mathbf{x}_t, r_t, t) = \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_{1i} \mathbf{x}(s) ds;$$

$$V_4(\mathbf{x}_t, r_t, t) = \int_{-d}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(s) ds d\theta;$$

$$V_5(\mathbf{x}_t, r_t, t) = \int_{-d}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{E}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(s) ds d\theta.$$

设 Γ 为随机过程 $\{\mathbf{x}(t), r(t)\}$ 的弱无穷小算子,

$$\begin{aligned} \Gamma V &= 2\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{E}^T \mathbf{P}_i + \mathbf{S}_i \mathbf{R}^T) \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(t) - \\ &(1 - \dot{d}(t)) \mathbf{x}^T(t-d(t)) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_{1i} \mathbf{x}(t) - \\ &\mathbf{x}^T(t-d(t)) \mathbf{Q}_{1i} \mathbf{x}(t-d(t)) + d\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(t) + \\ &d\dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{E}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t) \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} \mathbf{x}(t) - \\ &\int_{t-d}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{E}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(s) ds + \\ &\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_{1i} \mathbf{x}(s) ds. \end{aligned}$$

由式(8)可以得到

$$\int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{Q}_{1i} \right) \mathbf{x}(s) ds \leq \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(s) ds.$$

由牛顿莱布尼兹法则,得到

$$2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{W}_i \left(\mathbf{E} \mathbf{x}(t) - \mathbf{E} \mathbf{x}(t-d) - \int_{t-d}^t \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right) = 0.$$

当转移速率部分未知时,通过增加项的方法,可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} &= \sum_{j \in U_i^l} \pi_{ij} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} + \sum_{j \in U_{ik}^l} \pi_{ij} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} - \\ \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{M}_i &= \sum_{j \in U_i^l, j \neq i} \pi_{ij} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} + \sum_{j \in U_{ik}^l, j \neq i} \pi_{ij} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} + \\ \pi_{ii} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \mathbf{E} &- \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{M}_i. \end{aligned}$$

由于 $\pi_{ii} = -\sum_{j \in U_{ij} \neq i} \pi_{ij}$ 成立,并且

$$\sum_{j \in U_{ij} \neq i} \pi_{ij} = \sum_{j \in U_{ik}^l, j \neq i} \pi_{ij} + \sum_{j \in U_{ik}^l, j \neq i} \pi_{ij}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} &= \sum_{j \in U_{ik}^l, j \neq i} \pi_{ij} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \mathbf{E} - \mathbf{M}_i) + \\ \sum_{j \in U_{ik}^l, j \neq i} \pi_{ij} &(\mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \mathbf{E} - \mathbf{M}_i) - \pi_{ii} \mathbf{M}_i. \end{aligned}$$

当 $i \in U_k^l$ 时,

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} \leq \sum_{j \in U_k^l} \pi_{ij} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \mathbf{E} - \mathbf{M}_i) - \pi_{ii} \mathbf{M}_i.$$

当 $i \in U_{uk}^l$ 时,

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} \leq \sum_{j \in U_k^l} \pi_{ij} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \mathbf{E} - \mathbf{M}_i) - c \mathbf{M}_i,$$

$$c = \min \{ \pi_{ii} \}.$$

由以上所述,有

$$\Gamma V(\mathbf{x}_t, r_t, t) \leq \eta(t) \tilde{\Sigma}_i \eta^T(t) -$$

$$\int_{t-d}^t [\mathbf{W}_i^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(s)]^T \mathbf{Q}_3^{-1} [\mathbf{W}_i^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(s)] ds.$$

其中:

$$\eta(t) = [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t-d(t)) \quad \mathbf{x}^T(t-d) \quad \omega^T(t)]^T;$$

$$\tilde{\Sigma}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{11i} & \tilde{\Sigma}_{12i} & -\mathbf{W}_i \mathbf{E} & \tilde{\Sigma}_{14i} \\ * & -(1-\mu) \mathbf{Q} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{Q}_{1i} & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^T \\ \mathbf{A}_{di}^T \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{B}}_{oi}^T \end{bmatrix} d \mathbf{Q}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^T \\ \mathbf{A}_{di}^T \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{B}}_{oi}^T \end{bmatrix}^T;$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{11i} &= \text{sym}(\mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{A}}_i + \mathbf{S}_i \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{A}}_i + \mathbf{W}_i \mathbf{E}) + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{1i} + d \mathbf{Q}_2 + \\ d \mathbf{W}_i \mathbf{Q}_3^{-1} \mathbf{W}_i^T &+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_j \mathbf{E} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \mathbf{E} - \mathbf{M}_i) - v \mathbf{M}_i; \end{aligned}$$

$$\tilde{\Sigma}_{12i} = \mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{A}}_{di} + \mathbf{S}_i \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{A}}_{di};$$

$$\tilde{\Sigma}_{14i} = \mathbf{E}^T \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{B}}_{oi} + \mathbf{S}_i \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{B}}_{oi}.$$

当 $\omega(t) = 0$ 时,由引理 3 及式(7)可得 $\tilde{\Sigma}_i < 0$ 成立,所以系统(5)是随机容许的.

以下证明系统(5)在 H_∞ 扰动抑制水平 γ 的作用下随机容许.

定义性能指标函数 $J = \mathbb{E} \left\{ \int_0^t [\mathbf{z}^T(s) \mathbf{z}(s) - \right.$

$\gamma^2 \omega^T(s) \omega(s)] ds \Big\}$, 由于在零初始状态下, $V(\mathbf{x}_t, r_t, t)|_{t=0} = 0$, 并且 $\mathbb{E}\{V(\mathbf{x}_t, r_t, t)\} \geq 0$, 可以得到

$$\begin{aligned} J &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^t [\mathbf{z}^T(s) \mathbf{z}(s) - \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s) + \Gamma V(\mathbf{x}_s, r_s, s)] ds \right\} - \\ \mathbb{E} \left\{ \int_0^t V(\mathbf{x}_s, r_s, s) ds \right\} &\leq \mathbb{E} \left\{ \int_0^t \eta(s) (\tilde{\Sigma}_i + \xi_i \xi_i^T) \eta^T(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

其中: $\xi_i = [\mathbf{C}_i \quad \mathbf{C}_{di} \quad 0 \quad \mathbf{D}_{oi}]^T$;

$$\tilde{\Sigma}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{11i} & \tilde{\Sigma}_{12i} & -\mathbf{W}_i \mathbf{E} & \tilde{\Sigma}_{14i} \\ * & -(1-\mu) \mathbf{Q} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{Q}_{1i} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^T \\ \mathbf{A}_{di}^T \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{B}}_{oi}^T \end{bmatrix} d \mathbf{Q}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^T \\ \mathbf{A}_{di}^T \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{B}}_{oi}^T \end{bmatrix}^T.$$

由引理 2 以及引理 3, 式(7)可得

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \Sigma_{11i} & \Sigma_{12i} & -W_i E & \Sigma_{14i} & dA_i^T Q_3 & C_i^T & dW_i \\ * & -(1-\mu)Q & 0 & 0 & dA_{di}^T Q_3 & C_{di}^T & 0 \\ * & * & -Q_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & d\tilde{B}_{\omega i}^T Q_3 & D_{\omega i}^T & 0 \\ * & * & * & * & -dQ_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -dQ_3 \end{bmatrix} + \text{sym}\{A_i F_i(t) A_2\} < 0. \quad (9)$$

其中:

$$A_1 = [H_i^T \tilde{G}_i^T (E^T P_i + S_i R^T)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad dH_i^T \tilde{G}_i^T Q_3]^T,$$

$$A_2 = [L_i \quad L_{di} \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

于是由引理3,式(9)可变为 $\hat{\Sigma}_i + \xi_i \xi_i^T < 0$, 因此 $E \left\{ \int_0^{+\infty} z^T(t) z(t) dt \right\} \leq \gamma^2 \int_0^{+\infty} \omega^T(t) \omega(t) dt$ 成立, 系统(5)是 H_∞ 随机容许的.

根据定理1, 讨论增益矩阵 K_i , 使得系统(5)在 H_∞ 扰动水平 γ 的作用下随机容许.

定理2 对任意的时变时滞 $d(t)$, $0 \leq d(t) \leq d$,

$0 < \mu < 1$ 存在适当维数的正定对称矩阵 $X_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, Q, Q_{1i}, Q_2, Q_3 以及矩阵 W_i, M_i, Y_i 存在正标量 $\hat{\epsilon}_i, i = 1, 2, \dots, N$, 使得以下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -E^2 X_i - \hat{M}_i & X_i^T E^T \\ * & -X_j \end{bmatrix} < 0, i \in U, j \in U_{uk}^i, j \neq i, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_i & \hat{A}_1 & \hat{A}_2^T \\ * & \hat{\epsilon}_i I & 0 \\ * & * & \hat{\epsilon}_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \hat{Q}_{1i} - \hat{Q}_2 < 0. \quad (12)$$

其中: $R \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$ 满足 $E^T R = 0$;

$$\hat{\Sigma}_i = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{11i} & \hat{\Sigma}_{12i} & -\hat{W}_i E^T & \hat{\Sigma}_{14i} & \hat{\Sigma}_{15i} & X_i^T C_i^T & d\hat{W}_i & \hat{\Sigma}_{18i} \\ * & \hat{\Sigma}_{22i} & 0 & 0 & dX_i^T A_{di}^T & X_i^T C_{di}^T & 0 & 0 \\ * & * & -\hat{Q}_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & d\tilde{B}_{\omega i}^T & D_{\omega i}^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -d\hat{Q}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \hat{\Sigma}_{77i} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \hat{\Sigma}_{88i} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\Sigma}_{11i} = \text{sym}((E + R^T)(A_i X_i + B_i Y_i) + \hat{W}_i E^T) +$$

$$\hat{Q} + \hat{Q}_{1i} + d\hat{Q}_2 - \sum_{j \in U_{uk}^i, j \neq i}^N \pi_{ij} (E^2 X_i + \hat{M}_i) - v \hat{M}_i;$$

$$v = \begin{cases} \pi_{ii}, i \in U_k^i; \\ c, i \in U_{uk}^i; \end{cases} c = \min\{\pi_{ii}\}, i \in U_{uk}^i;$$

$$\hat{\Sigma}_{12i} = (E + R^T) A_{di} X_i;$$

$$\hat{\Sigma}_{22i} = -(1-\mu)\hat{Q};$$

$$\hat{\Sigma}_{14i} = (E + R^T) \tilde{B}_{\omega i};$$

$$\hat{\Sigma}_{15i} = d(X_i^T A_i^T + Y_i^T B_i^T);$$

$$\hat{\Sigma}_{77i} = -dX_i^T - dX_i + d\hat{Q}_3;$$

$$\hat{\Sigma}_{18i} = [\pi_{i1} X_1^T E^T \quad \cdots \quad \pi_{i(i-1)} X_{i-1}^T E^T$$

$$\pi_{i(i+1)} X_{i+1}^T E^T \quad \cdots \quad \pi_{iN} X_N^T E^T];$$

$$\hat{\Sigma}_{88i} = -\text{diag}\{\pi_{i1} X_1 \quad \cdots \quad \pi_{i(i-1)} X_{i-1}$$

$$\pi_{i(i+1)} X_{i+1} \quad \cdots \quad \pi_{iN} X_N\};$$

$$\hat{M}_i = X_i^T M_i X_i, \hat{Q} = X_i^T Q X_i, \hat{Q}_{1i} = X_i^T Q_{1i} X_i;$$

$$\hat{Q}_2 = X_i^T Q_2 X_i, \hat{Q}_3 = Q_3^{-1}, \hat{W}_i = X_i^T W_i X_i;$$

$$\hat{A}_1 = [\hat{\epsilon}_i H_i^T \tilde{G}_i^T (E + R^T)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad d\hat{\epsilon}_i H_i^T \tilde{G}_i^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T;$$

$$\hat{A}_2 = [X_i^T L_i \quad X_i^T L_{di} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

则系统(5)是 H_∞ 随机容许的, 反馈增益矩阵 K_i 可表示为

$$K_i = Y_i X_i^{-1}. \quad (13)$$

证明 令 $S_i = P_i^T, X_i = P_i^{-1}, \hat{Q}_3 = Q_3^{-1}$ 在式(6), 式(8)左乘 X_i^T 右乘 X_i 得到式(10), 式(12), 由于 $E^T R = 0, E^T P_i = P_i^T E$, 对式(9)左乘 $\text{diag}(X_i^T, X_i^T, X_i^T, I, \hat{Q}_3^T, I, X_i^T, I, I)$, 右乘 $\text{diag}(X_i, X_i, X_i, I, \hat{Q}_3, I, X_i, I, I)$.

$$\text{由于 } (X_i - Q_3^{-1})^T Q_3 (X_i - Q_3^{-1}) =$$

$$X_i^T Q_3 X_i - X_i - X_i^T + Q_3^{-1} \geq 0,$$

$$\text{所以 } -dX_i^T Q_3 X_i \leq -dX_i - dX_i^T + dQ_3^{-1}.$$

通过引理3以及上述处理可得式(11), 且反馈增益矩阵为 $K_i = Y_i X_i^{-1}$, 证毕.

定理3 给定常数 $\alpha > 0$, 矩阵 G_i, K_i 由式(13)

所得,设计如下形式的滑模控制器:

$$u(t) = K_i x(t) - \rho_i \text{sign}(s(t)). \quad (14)$$

其中,

$$\rho_i = \alpha + \left\| (G_i B_i)^{-1} G_i H_i \right\| (\|L_i x(t)\| + \|L_{di} x(t-d(t))\|) + \left\| (G_i B_i)^{-1} G_i B_{\omega i} \right\| \|\omega(t)\| + \kappa_1 \|x(t)\| + \kappa_2 \|x(t-d(t))\|. \quad (15)$$

那么时滞广义 Markov 跳变系统的状态轨迹能够在有限时间内到达滑模面,并在滑模面上稳定运动.

证明 选取如下形式的李雅普诺夫函数:

$$W(t) = s^T(t) \frac{1}{2} (G_i B_i)^{-1} s(t),$$

$$\dot{s}(t) = G_i [\Delta A_i x(t) + \Delta A_{di} x(t-d(t)) + B_{\omega i} \omega(t) - B_i (u(t) + f(x(t), x(t-d(t))))] - G_i B_i K_i x(t).$$

将式(14)和式(15)以及上式代入 $\dot{W}(t) = s^T(t) (G_i B_i)^{-1} \dot{s}(t)$, 可得

$$\dot{W}(t) \leq -\alpha \|s(t)\| \leq -\bar{\alpha} W^{1/2}(t).$$

其中 $\bar{\alpha} = \alpha \sqrt{2/\lambda_{\max}[(G_i B_i)^{-1}]}$.

由上式可知存在 $t^* = 2\sqrt{V(0)}/\bar{\alpha}$ 使得 $V(t) = 0$ 即 $s(t) = 0$, 系统(1)的轨迹在有限时间里能到达预期的滑模面,证毕.

3 数值仿真

非线性广义时滞 Markov 跳变系统(1)在控制器(14)作用下的闭环控制系统结构如图1所示.

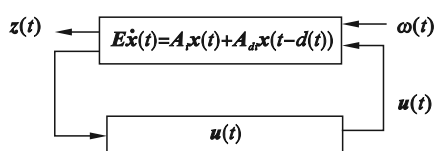


图1 闭环控制系统结构图

Fig. 1 Structure diagram of closed-loop control system

考虑时滞广义 Markov 跳变系统(1)具有两个模态($i=r(t) \in \{1,2\}$)的情况,系数矩阵和相关参数如下.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1.3 & -1 \\ 1.2 & -0.6 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, B_{\omega 1} = B_{\omega 2} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix},$$

$$D_{\omega 1} = D_{\omega 2} = 0.1, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.8 \end{bmatrix}, C_{d1} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$C_{d2} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = L_2 = L_{d1} = L_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_i = 0.5 \sin t, \omega(t) = e^{-t} \sin t,$$

$$f(x(t), x(t-d(t))) = 0.1x_1(t) + 0.1x_1(t-d(t)).$$

假设状态转移概率矩阵给定为

$$\Pi = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.6 \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix}, c = \min\{\pi_{ii}\} = -0.8.$$

给定参数 $d=0.15, \mu=0.05, \gamma=0.4, \alpha$ 为未知且有界的转移概率. 开环系统的状态如图2所示,模态变化如图3所示.

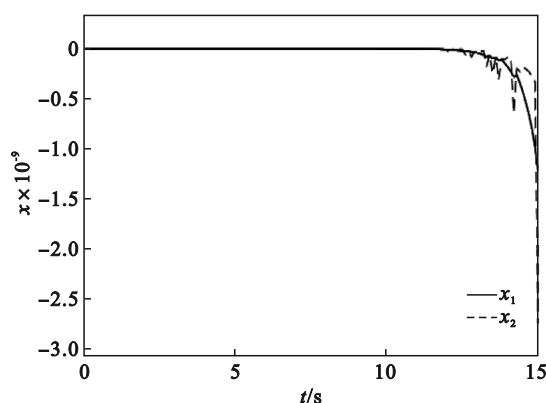


图2 开环系统 $x_1(t), x_2(t)$ 的状态轨迹

Fig. 2 State trajectories of the open-loop system $x_1(t), x_2(t)$

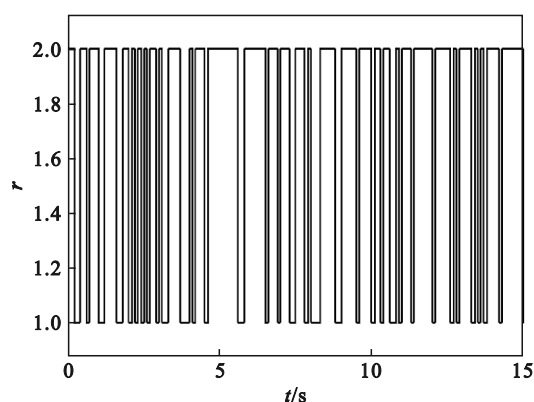


图3 系统模态 $r(t)$ 的轨迹

Fig. 3 Trajectory of system mode $r(t)$

通过求解线性矩阵不等式可得.

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.4506 & -1.6759 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -6.4371 & -2.0908 \end{bmatrix}.$$

仿真过程中,将 $\text{sign}(s(t))$ 表示为 $\frac{s(t)}{\|s(t)\| + 0.1}$,
仿真结果如图4~图6所示.

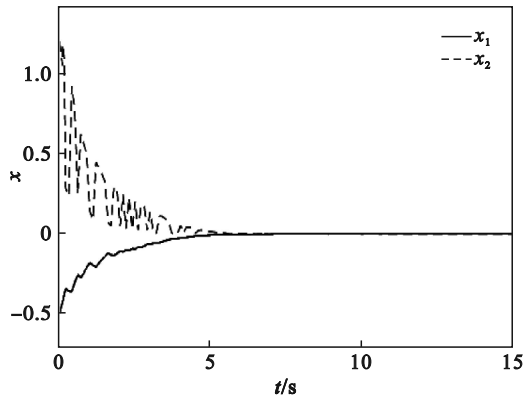


图4 闭环系统 $x_1(t), x_2(t)$ 的状态轨迹

Fig. 4 State trajectories of the closed-loop system $x_1(t), x_2(t)$

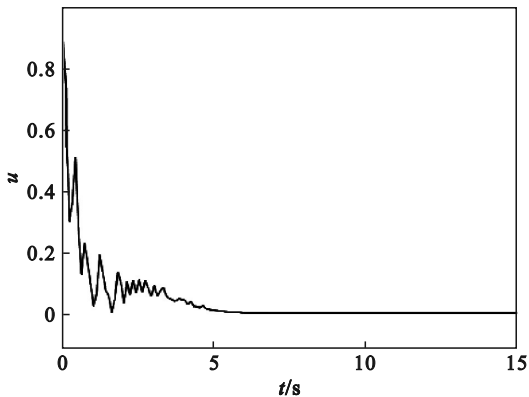


图5 $u(t)$ 的轨迹

Fig. 5 Trajectories of $u(t)$

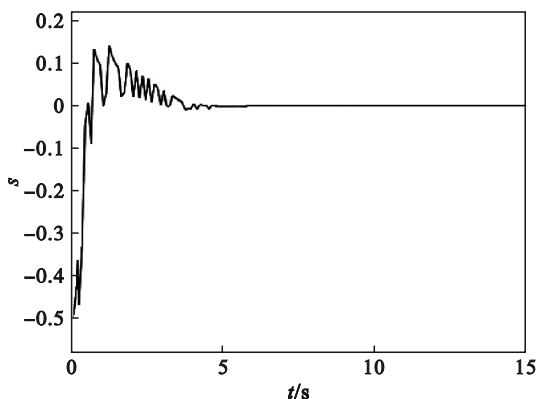


图6 滑模面 $s(t)$ 的轨迹

Fig. 6 Trajectories of the sliding mode variable $s(t)$

4 结 语

本文研究了状态转移概率部分未知的时滞

广义马尔科夫跳变系统的 H_∞ 控制问题. 首先,对系统设计Lyapunov-Krasovskii泛函,利用线性矩阵不等式放缩法,得到闭环系统 H_∞ 随机容许的条件. 之后,求出系统的控制器. 最后,用Matlab进行数值和图像仿真,证明了理论的有效性.

参考文献:

- [1] Jiang B P, Kao Y G, Gao C C, et al. Stability and stabilization for singular switching semi-Markovian jump systems with generally uncertain transition rates [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63 (11): 3919–3926.
- [2] Wu X T, Shi P, Tang Y, et al. Stability analysis of semi-Markov jump stochastic nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 105 (8): 1432–1452.
- [3] Jiang B P, Gao C C, Xie J. Passivity based sliding mode control of uncertain singular Markovian jump systems with time-varying delay and nonlinear perturbations [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 271 (11): 187–200.
- [4] Wang J R, Wang H J, Xue A K, et al. Delay-dependent H_∞ control for singular Markovian jump systems with time delay [J]. *Nonlinear Analysis Hybrid Systems*, 2013, 8 (5): 1–12.
- [5] Zhou W N, Fang J. A delay-dependent robust H_∞ admissibility and stabilization for uncertain singular system with Markovian jumping parameters [J]. *Circuits Systems and Signal Processing*, 2009, 28 (3): 433–450.
- [6] Wu Z G, Su H Y, Chu J. H_∞ filtering for singular Markovian jump systems with time delay [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 20: 939–957.
- [7] Han Y Q, Kao Y G, Gao C C. Robust sliding mode control for uncertain discrete singular systems with time-varying delays and external disturbances. [J]. *Automatica*, 2017, 75 (1): 210–216.
- [8] Gao Q, Liu L, Feng G, et al. Universal fuzzy integral sliding-mode controllers based on T-S fuzzy models [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, 22 (2): 350–362.
- [9] Mathiyalagan K, Park J H, Sakthivel R, et al. Robust mixed H_∞ and passive filtering for networked Markov jump systems with impulses [J]. *Signal Processing*, 2014, 101 (8): 162–173.
- [10] Kao Y G, Xie J, Wang C H. Stabilization of singular Markovian jump systems with generally uncertain transition rates [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59 (9): 2604–2610.
- [11] Park I S, Kwon N K, Park P. Dynamic output-feedback control for singular Markovian jump systems with partly unknown transition rates [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95: 3149–3160.
- [12] Zohrabi N, Zakeri H, Abolmasoumi A H, et al. An adaptive sliding mode approach for Markovian jump systems with uncertain mode-dependent time-varying delays and partly unknown transition probabilities [J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2018, 7: 209–225.