

# 压电智能悬臂梁主动振动最优控制研究

陈震, 薛定宇, 郝丽娜, 徐心和

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

**摘 要:** 以压电智能材料聚偏氟乙烯(PVDF)作感知和离子交换膜金属聚合物(IPMC)作驱动的悬臂梁为研究对象,建立了智能悬臂梁的压电传感和致动方程,并通过模态分析法变换为基于闭环控制系统的状态空间方程,设计了压电智能梁的振动控制系统。将遗传算法和线性二次型最优控制相结合,采用遗传算法设计  $Q$ 、 $R$  阵,以获取状态反馈控制律,研究了压电智能梁的振动的最优控制问题。仿真实验结果证明,控制系统具有很好的振动抑制效果。

**关 键 词:** 微力传感器;智能悬臂梁;振动控制;遗传算法;最优控制

中图分类号: TP 212

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2010)11-1550-04

## On the Optimal Control of Active Vibration of a Smart Piezoelectric Cantilever Beam

CHEN Zhen, XUE Ding-yu, HAO Li-na, XU Xin-he

(School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China.

Correspondent: CHEN Zhen, E-mail: chenzhensy@126.com)

**Abstract:** The cantilever beam which is made from the smart piezoelectric material PVDF as sensor and IPMC as actuator was investigated, with the sensing and actuating equation both given relevantly. Then, they were transformed into the state space equations via modal analysis, thus designing a vibration control system for the smart piezoelectric cantilever beam. Combining the genetic algorithm with LQR optimal control to design the weighted matrices  $Q$  and  $R$ , the control ratio of state feedback can be obtained so as to investigate the optimal control of the active vibration of a smart piezoelectric cantilever beam. Simulation results verified that the control system is good for vibration abatement.

**Key words:** micro-force sensor; smart cantilever beams; vibration control; genetic algorithm; LQR(linear quadratic regulator)

压电效应是 Jacques Curie 和 Pierre Curie 在 1880 年发现的,目前已知的压电材料有近千种。PVDF(polyvinylidene fluoride)是一种新型的高分子聚合物型传感材料,它具有强压电性,与其他材料相比不仅介电常数大,压电和热释电性较强,感知性好,而且具有优良的机械性能,现已成为最具潜力的聚合物压电材料<sup>[1]</sup>。IPMC(ionic exchange polymer metal composites)即离子交换膜金属复合材料是一类重要的电致形变聚合物,是一个机电耦合系统,具有驱动和感知的功能<sup>[2]</sup>。它具有弯曲量大,驱动电压低,有弹性和生物适应性,在仿

生机器人、医疗设备、微操作器<sup>[3-4]</sup>等方面具有应用潜能。国外已经在微机电系统方面研究出各种 PVDF 传感器,具有代表性的有申延涛、席宁等研究出基于 PVDF 的二维悬臂梁复合结构微力传感器和主动微力传感器<sup>[5]</sup>。综合利用 PVDF 的高感知特性和 IPMC 的低电压驱动性,可以形成 IPMC 驱动器/PVDF 感知器的机构<sup>[6]</sup>,是当前微力传感器研究的主要方向。在微力感知机构中,探测极小的位移和压力,悬臂梁是理想的装置<sup>[7]</sup>。国内外学者对 PVDF 悬臂梁结构主动振动控制领域的应用进行了大量研究,但对 IPMC 驱动/PVDF

收稿日期: 2009-07-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60675050); 辽宁省博士启动基金资助项目(20061017)。

作者简介: 陈震(1976-),男,河南周口人,东北大学博士研究生;薛定宇(1963-),男,辽宁沈阳人,东北大学教授,博士生导师。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

感知的悬臂梁机构在主动振动控制的研究极少<sup>[8-9]</sup>。本文以压电智能悬臂梁 IPMC 驱动/PVDF 感知为研究对象, 设计最优控制策略, 并通过仿真实验证明该方法的可行性。

# 1 压电智能悬臂梁动力学模型建立

采用压电悬臂梁作为受控对象, 建立压电智能梁的动力学方程。以柔性臂的轴向方向为  $X$  方向, 以柔性臂的振动挠度方向为  $Z$  向, 建立如图 1 所示的坐标系。其中第 1 片压电片两端的位置坐标分别记作  $X_1, X_2$ 。

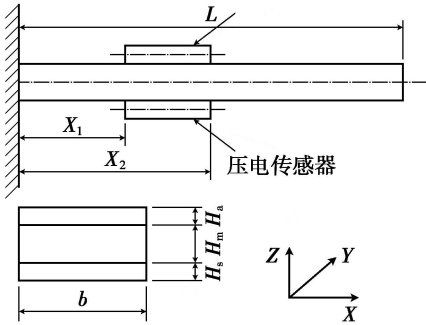


图 1 压电悬臂梁示意图

Fig. 1 Schematic of piezoelectric cantilever beam

这里压电材料的极化方向沿  $Z$  轴, 压电材料是各向同性的。假设压电驱动器、传感器与梁是完美粘贴, 没有相对移动, 不考虑梁的纵向移动。柔性臂动力学方程主要包括压电片传感方程和压电致动方程。

## 1.1 压电传感方程

根据材料力学中对于梁的弯曲正应力及小变形情形下梁的挠度方程和一维应变片的电位移方程, 粘贴于臂表面的压电传感片将会产生电荷, 经电荷放大器放大后, 得到与电荷成正比的电压信号, 也即压电传感方程为

$$U_s(x, t) = K \times Q_s(x, t) = K \int_{x_1}^{x_2} -cE_s d_{31} b \times \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} K (H_m + H_s) \times cE_s d_{31} b [\dot{\omega}(x_2) - \dot{\omega}(x_1)] \quad (1)$$

其中:  $c$  是复合梁的中性轴到 PVDF 感知层中性面之间的距离,  $c = \frac{1}{2}(H_m + H_s)$ ;  $E_s$  是 PVDF 的杨氏模数;  $0 \leq x \leq L$ ;  $K$  为电荷放大器的放大倍数。式(1)是利用压电传感片对臂的振动进行测量的基本公式。

## 1.2 压电致动方程

当在压电致动片上施加电压时, 它将发生形变从而对柔性臂产生弯矩。设压电致动片上的电

压为  $U_a(x, t)$ , 它仅是时间的函数,  $H(x)$  为分布式。 $x_1$  和  $x_2$  分别为压电片两端距离梁的固定端的距离。对于图 1 所示梁模型, 认为是等截面梁, 满足欧拉伯努力建模的条件, 即梁的长度必须大于截面高度的 5 倍以上。采用 Euler-Bernouli 梁的模型带有附加条件的动力学方程可建立致动方程:

$$\rho A \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times C_a U_a(t) [H(x - x_1) - H(x - x_2)] = 0 \quad (2)$$

其中:  $\rho$  为柔性臂的密度;  $A$  为柔性臂横截面的面积, 等于柔性臂高度和厚度的乘积。 $C_a = \frac{1}{2} E_a d_{31} \times b (H_m + H_a)$ , 它是一个常数, 由复合梁的几何尺寸决定;  $b$  为致动片的宽度;  $E$  为柔性臂的弹性模量;  $I$  为柔性臂的截面二次矩,  $I = bh^3/12$ ,  $b, h$  分别为臂的高度和厚度;  $\omega$  是梁中性轴上任一点的挠度, 是坐标  $x$  和  $t$  的函数。

建模时还需考虑其边界条件如下:

$$\omega(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$EI \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad (5)$$

$$EI \frac{\partial^3 \omega(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = 0. \quad (6)$$

式(3), 式(4)为柔性臂固定端的几何边界条件, 其物理意义是指该处的挠度和转角都为零; 式(5), 式(6)为柔性臂自由端的力边界条件, 其物理意义表示该处的弯矩和剪力均为零。

此模型给出了致动片上所加电压与柔性臂挠度(柔性臂振动时的横向位移)的关系, 其中柔性臂的挠度可通过压电传感片得到。根据传感片的输出, 可设计控制律, 即施加在致动片上的相应电压, 实现对柔性臂振动的主动控制。但是, 该系统致动方程为一偏微分系统, 被控变量  $Y$  (挠度)既是时间的函数, 同时又是空间的函数, 缺乏有效的数学分析工具来直接求解此方程。

对此, 引入振动力学上的模态分析方法, 即采用正交模态变换, 将系统偏微分方程形式转换为一组二阶微分方程形式, 从而便于设计控制器。

## 1.3 模型变换

由振动力学可知, 系统任何一种可能的运动都可以用主振型(或主模态)的线性组合来描述, 即振型叠加原理。采用分离变量法, 系统的挠度(即柔性臂的横向位移)可表示为

$$\omega(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(x)q_i(t). \tag{7}$$

其中:  $\phi_i(x)$  为臂的第  $i$  阶模态振型;  $q_i(t)$  为臂的第  $i$  阶模态坐标.

将式(7)代入压电片的传感方程式(1)可得传感器的输出电压对应的模态电压:

$$U_s(x,t)=K\int_{x_1}^{x_2}-cE_sd_{31}b\frac{\partial^2\omega_s(x,t)}{\partial x^2}=$$
$$-cE_sd_{31}bK\sum_{i=1}^{\infty}[\phi_i(x_2)-\phi_i(x_1)]q_i(t). \tag{8}$$

其中:  $i=0,1,2,\dots$ ;  $c$  是复合梁的中性轴到 PVDF 感知层中性面之间的距离,  $c=(H_m+H_s)/2$ ;  $K$  为电荷放大器的放大倍数.

将式(7)代入致动方程(2)可得:

$$\rho A\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(x)q_i''(t)+EI\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i^{(4)}(x)q_i(t)-$$
$$C_a\sum_{k=1}^K U_{ak}(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}[H(x-x_k)-$$
$$H(x-x_{k+1})]=0. \tag{9}$$

方程两边同乘以  $\phi_j(x)$ , 并沿梁长积分, 再结合式(8), 式(9) 可得模态运动方程:

$$\ddot{q}_i(t)+\omega_{i0}^2q_i=C_a\sum_{k=1}^K U_{ak}(t)[\phi_i(x_{k+1})-$$
$$\phi_i(x_k)]=\alpha_i U_{ai}(t). \tag{10}$$

其中:  $i=0,1,2\dots$  为模态个数;  $q_i(t)$  为系统模态;  $k$  为压电致动片的个数;  $U_{ak}(t)$  为第  $k$  个致动片的输入电压;  $x_k, x_{k+1}$  是第  $k$  个压电致动片两端的位置;  $C_a=\frac{1}{2}E_a d_{31} b(H_m+H_a)$ ;  $\alpha_i$  为第  $i$  阶模态影响系数. 由于实际系统总存在阻尼, 故可将式(10) 写为

$$\ddot{q}_i(t)+2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t)+\omega_i^2q_i(t)=$$
$$C_a U_a(t)\sum_{k=1}^K[\phi_i(x_{k+1})-\phi_i(x_k)]=$$
$$\alpha_i U_a(t). \tag{11}$$

其中:  $2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t)$  为阻尼项;  $\xi_i$  为第  $i$  阶模态自然阻尼比.

由上述微分方程, 引入状态变量:

$$X(t)=[q_1,q_2,\dots,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dots,\dot{q}_n]^T,$$
$$U(t)=[u_{1a}(t),u_{2a}(t),\dots,u_{na}(t)]^T,$$
$$\phi_i(x_k)=\phi_i(x_{k2})-\phi_i(x_{k1}).$$

可得到系统的状态空间描述

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t)+BU(t), \\ Y(t) &= CX(t). \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

其中:  $A=\begin{bmatrix} O_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -\Omega & -2\xi\Omega \end{bmatrix},$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \cdots & \phi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_n(x_1) & \phi_n(x_2) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix},$$
$$C=\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1(x_2) & \cdots & \phi_n(x_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$
$$\Omega=[\omega_1^2\cdots\omega_n^2].$$

2 智能悬臂梁控制系统设计

主体结构为一端固定、另一端自由的柔性悬臂梁, 悬臂梁基底使用条形绝缘基体, 在基体的根部两面对应位置粘贴压电智能材料, 分别作为驱动片和感知片. 当自由端受到外力作用时, 压电感知层产生电荷, 电荷经过电荷放大器后输出与振动量成正比的电压信号, 经滤波器、A/D(模/数)转换器后进入控制器, 根据控制律产生的控制信号经过 D/A(数/模)转换器、功率放大器后在驱动层上施加电压, 控制梁的变形, 实现对梁的主动振动控制.

线性二次型最优控制 LQR(linear quadratic regulator)采用遗传算法设计  $Q, R$  阵, 利用其所具有智能式搜索、渐进式优化的特点, 获取  $Q, R$  的全局最优解, 实现悬臂梁的 LQR 最优控制器的设计. 目标函数在遗传算法中应用是关键, 目标函数选取关系到遗传算法在编程时候的难易程度<sup>[10]</sup>. 本文选取 LQR 二次型目标函数作为遗传算法的适应度函数. 对  $Q$  和  $R$  采取分别优化, 先对  $Q$  进行优化把  $R$  确定为一个常数, 在得到  $Q$  的优化结果后再对  $R$  进行优化. 最后  $Q$  和  $R$  优化的结果得出反馈增益矩阵. 所设计的压电悬臂梁最优控制系统如图 2 所示.

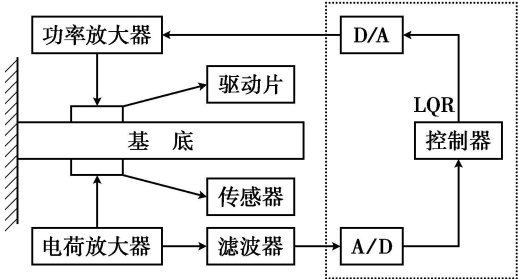


图 2 压电悬臂梁控制系统图  
Fig.2 Control system of piezoelectric cantilever beam

3 实验结果

实验中选用材料和尺寸如表 1 所示.

表 1 PVDF/ IPMC/ Polyester 材料和尺寸  
Table 1 Dimensions and parameters of the materials used differently

| 参 数                                  | 基体(绝缘层) polyester 聚酯 | 传感片 PVDF             | 驱动片 IPMC             |
|--------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 长/mm                                 | 50                   | 10                   | 10                   |
| 宽/mm                                 | 10                   | 5                    | 5                    |
| 厚/ $\mu\text{m}$                     | 100                  | 30                   | 30                   |
| 密度/ $(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$  | 2 000                | 1 780                | 2 000                |
| 弹性模量/ $(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$ | $3.8\times 10^7$     | $2\times 10^9$       | $5\times 10^7$       |
| 压电系数/ $(\text{C}\cdot\text{N}^{-1})$ |                      | $2.5\times 10^{-11}$ | $4.5\times 10^{-11}$ |

注: 中性轴  $C=102.5\times 10^{-6}\text{ m}$ .

根据优化得到的  $Q$  和  $R$  阵的值求出增益反馈矩阵  $K$ , 将得出的最优反馈增益矩阵  $K$  值应用在悬臂梁上. 在实验中, 给梁的端部一个冲击, 在 MATLAB 环境下完成对悬臂梁控制系统的仿真, 仿真实验结果如图 3 所示.

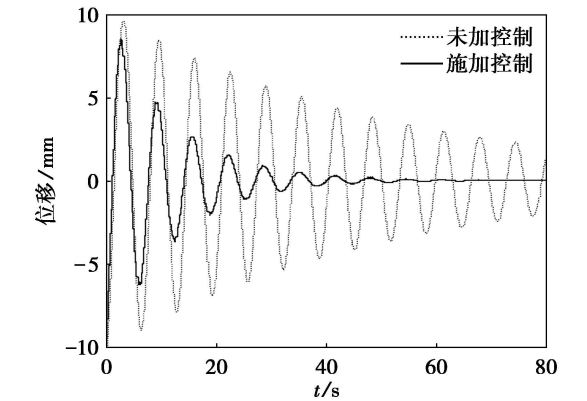


图 3 仿真实验结果  
Fig.3 Simulation results

从实验结果来看, 控制系统具有很好的快速响应能力和振动控制效果.

4 结 论

本文以 PVDF/ IPMC 压电智能悬臂梁为研究对象, 在建立悬臂梁动力学模型基础上, 采用遗传算法和 LQR 最优控制相结合进行控制. 对悬臂梁动力学模型的仿真控制结果表明, 该方法响应速度快、超调小, 优化获得的参数使实际控制稳定, 证实该方法的有效性和实用性.

参考文献:

[ 1 ] 孙建丽, 刘廷华. 压电高聚物材料的发展及应用[ J ]. 塑料工业, 2005, 33( 5 ): 69– 71.

(Sun Jian-li, Liu Ting-hua. Application and development of piezoelectric superelastic polymer material [ J ]. *Plastic Industry*, 2005, 33( 5 ): 69– 71. )

[ 2 ] Shahinpoor M, Kim K J. Ionic polymer-metal composites: I. fundamentals [ J ]. *Smart Materials and Structures*, 2001, 10: 819– 833.

[ 3 ] Guo S, Fukuda T, Asaka K. A new type of fish-like underwater microrobot [ J ]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2003, 8( 1 ): 136– 141.

[ 4 ] Shahinpoor M, Kim K J. Ionic polymer-metal composites: IV. industrial and medical applications [ J ]. *Smart Materials and Structures*, 2005( 14 ): 197– 214.

[ 5 ] Shen Y T, Winder E, Xi N, *et al.* Closed-loop optimal control-enabled piezoelectric microforce sensors [ J ]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2006, 11( 4 ): 420– 427.

[ 6 ] Chen Z, Shen Y T, Xi N, *et al.* Integrated sensing for ionic polymer-metal composite actuators using PVDF thin films [ J ]. *Smart Materials and Structures*, 2007, 16( S ): 262– 271.

[ 7 ] Datskos P G, Thundat T, Lavrik N V. Micro and nanocantilever sensors [ J ]. *Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology*, 2004, 8( 2 ): 1– 10.

[ 8 ] Arbat A, Edqvist E, Casanova R, *et al.* Design and validation of the control circuits for a micro-cantilever tool for a micro-robot [ J ]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2009, 153( 1 ): 76– 83.

[ 9 ] Zhang J J, He L L, Wang E G, *et al.* Active vibration control of flexible structures using piezoelectric materials [ C ]. // *International Conference on Advanced Computer Control*. Singapore: IEEE Press, 2009: 540– 545.

[ 10 ] 关守平, 张艳蕊. 基于实数编码遗传算法的发酵过程优化控制 [ J ]. 东北大学学报: 自然科学版, 2008, 29( 7 ): 928– 931.

(Guan Shou-ping, Zhang Yan-rui. Optimal control based on real-coding genetic algorithm for fermentation process [ J ]. *Journal of Northeastern University: Natural Science*, 2008, 29( 7 ): 928– 931. )