

# 倾斜短纤维拉出的简化分析

赵丽军<sup>1</sup>, 黄宝宗<sup>2</sup>, 袁惠群<sup>2</sup>

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004)

**摘 要:** 为了研究具有任意倾斜角度的短纤维从脆性基体中拉出的过程和能耗, 提出了一种简化分析方法, 忽略拉出之前的界面脱粘过程及纤维拉出段的局部弯曲, 考虑纤维拉出与基体剥落耦合, 建立了拉出过程的非线性控制方程, 用迭代法求解, 得到拉出过程中短纤维桥联力与张开位移的关系, 拉出能量以及界面摩擦应力, 纤维倾斜角、长度等参数的影响, 模拟计算结果表明: 基体剥落可以提高拉出力, 改变拉出力与位移的关系; 适当选择界面摩擦和纤维长度可以显著增加拉出能耗。

**关 键 词:** 短纤维; 桥联; 倾斜; 拉出; 剥落

中图分类号: TB 332

文献标识码: A

文章编号: 1005-3026(2009)12-1771-04

## Simplified Analysis of Pull-out Inclined Short Fibers

ZHAO Li-jun<sup>1</sup>, HUANG Bao-zong<sup>2</sup>, YUAN Hui-qun<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: HUANG Bao-zong, professor, E-mail: huangbz@hotmail.com)

**Abstract:** A simplified method was proposed to analyze the bridging force and energy dissipation in the pulling-out process of inclined short fibers from brittle matrix. Coupling the fiber pull-out with matrix spalling and neglecting the local bending of fibers in the interface debonding process before fiber pull-out and in the pull-out section, some nonlinear control equations were given to the fiber pull-out process with an iteration method to solve them. In this way the relationship between bridging force and opening displacement during short fiber pull-out was given, as well as the effects of such parameters as pull-out energy, interface friction stress, inclination angle and fiber length on the pull-out process. Simulation results showed that the matrix spalling can increase the pull-out force of fibers and change the relationship between pull-out force and displacement and, what's more, a conclusion is drawn that choosing appropriately the interface friction and length of fibers will significantly increase the pull-out energy dissipation.

**Key words:** short fiber; bridging; inclination; pull-out; spalling

短纤维复合材料有较高的强度和韧性, 制备和成形工艺比较简单, 工程应用日益广泛, 例如片状模塑料(SMG-R)、纤维增强陶瓷及混凝土等。短纤维的增韧机理主要是桥联, 断裂过程中桥联力在裂纹面相对位移上做功增加了裂纹扩展阻力。纤维桥联是一个复杂过程, 包括纤维与基体的变形、界面脱粘、纤维拉出、基体剥落等, 由于拉出位移远远大于变形, 所以拉出过程中界面摩擦力做功是能量耗散的主要部分。为了分析纤维-基体

的应力传递、桥联及其对复合材料性能的影响, 对于界面脱粘和纤维拉出已经进行了大量研究。Marshall等<sup>[1]</sup>在研究纤维脆性基体复合材料断裂时建立了拉出力与裂纹张开位移的简单解析关系, 未考虑界面脱粘影响。此后20多年来, 关于纤维脱粘、拉出和应力传递问题发表了许多试验和细观力学研究论文, 例如文献[2-5], 其中大多数研究集中于纤维与裂纹表面相垂直的情况。短纤维复合材料中纤维通常是杂乱分布的或者是在平

收稿日期: 2008-11-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572037)。

作者简介: 赵丽军(1977-), 女, 吉林长春人, 东北大学博士研究生, 辽宁省交通高等专科学校讲师; 黄宝宗(1939-), 男, 辽宁葫芦岛人, 东北大学教授, 博士生导师; 袁惠群(1954-), 男, 河北石家庄人, 东北大学教授, 博士生导师。

面内杂乱分布(例如 SMG-R),因而桥联纤维一般不与裂纹面垂直.文献[6-7]研究了纤维倾斜对拉出和桥联的影响,考虑基体剥落用数值方法分析倾斜纤维的拉出,在拉出长度很小时(纤维直径量级)得到拉出应力与位移的关系.短纤维复合材料的断裂韧性与纤维拉出全过程的能耗相关,目前对于倾斜纤维在大范围内拉出的研究很少,文献[8-9]为了研究层合板层间短纤维桥联对分层韧度的影响,近似地分析了短纤维在几乎与裂纹面平行情况下的拉出,但不能用于任意倾斜角度.

本文用一种简化分析方法研究具有任意倾斜角度的准脆性短纤维(Kevlar 等)从脆性基体中拉出的完整过程,为了考虑基体剥落的影响,改进了文献[7]的基体剥落准则,通过算例分析了倾斜角度、界面摩擦力、纤维长度等参数对单根纤维拉出能量和应力的影响.

1 模型、基本关系

考虑与裂纹面倾斜任意角度的桥联纤维的一半,长度  $l$ ,直径  $d$ ,如图 1 所示.图中  $A'B'$  是开裂前纤维的位置,与裂纹面法线的夹角为  $\theta$ ,当裂纹张开位移为  $2w$  时,纤维拉出位置是  $ACB$ ,  $C$  为剥离点,拉出长度  $\Delta u$ ,基体剥落长度  $\Delta s$ .假设:①纤维长度  $l \gg d$ ,基体剥落长度  $\Delta s \ll l$ ;②纤维是弹性、准脆性材料,有良好的抗弯折性能;③根据文献[8]的计算结果,剥落点附近拉出纤维的局部弯曲发生在很小的范围内,可以略去.

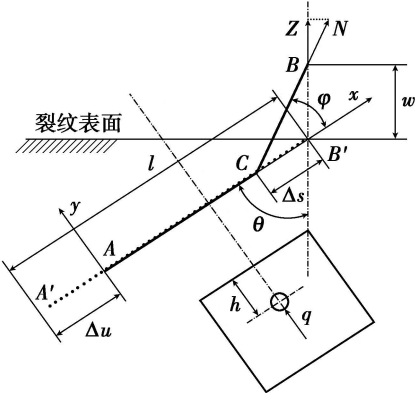


图 1 倾斜纤维的拉出  
Fig. 1 Pull-out of inclined fibers

根据上述假设,纤维拉出前在脱粘过程中拉出端  $B'$  的位移与拉出位移比较很小,所以脱粘过程中桥联力做的功可以忽略,因此假设界面已经脱粘,只考虑拉出过程中耗散的能量,即图 1 中桥联力  $N$  的法向分量  $Z$  在张开位移上的做功.纤维  $ACB$  可以分为两部分:拉出段  $CB$  和埋入段  $AC$ ,由假设③,  $CB$  段为轴力  $N$  作用下的简单拉伸.由

图 1 容易得到下列几何关系:

$$l_{AC} = l - \Delta u - \Delta s, \tag{1}$$

$$l_{CB} = \frac{w + \Delta s \cos \theta}{\cos(\theta - \varphi)}, \tag{2}$$

$$l_{AC} + l_{CB} = l + \int_{AC} \epsilon_{AC} dx + \epsilon_{CB} l_{CB}. \tag{3}$$

其中:  $l_{AC}$ ,  $l_{CB}$  是  $AC$ ,  $CB$  的长度;  $\epsilon_{AC}$ ,  $\epsilon_{CB}$  是轴向应变;  $\varphi$  是  $AC$  与  $CB$  方向所夹锐角;坐标轴  $x$ ,  $y$  如图 1 所示.由  $\triangle CB'B$  得到

$$\tan \varphi = \frac{w \sin \theta}{\Delta s + w \cos \theta}. \tag{4}$$

$AC$  段的受力如图 2 所示,其中  $q$  是基体对单位长度纤维的支持力,  $\tau_f$  是脱粘后基体与纤维间的摩擦应力,与纤维和基体材料、纤维表面处理及残余应力等因素有关,可通过拉出试验测定.  $AC$  段的轴向平衡条件和法向桥联力是

$$N \cos \varphi = \tau_f \pi d l_{AC}, \tag{5}$$

$$Z = N \cos(\theta - \varphi). \tag{6}$$

由杆件  $AC$  和  $CB$  的本构关系及式(5),得到

$$\int_{AC} \epsilon_{AC} dx = \frac{\pi d \tau_f (l - \Delta u - \Delta s)^2}{2 E_f A}, \tag{7}$$

$$\epsilon_{CB} = \frac{\pi d \tau_f (l - \Delta u - \Delta s)}{E_f A \cos \varphi}. \tag{8}$$

$E_f$ ,  $A$  是纤维的弹性模量和截面面积.将式(1),式(2),式(7),式(8)代入式(3),得到

$$\frac{w + \Delta s \cos \theta}{\cos(\theta - \varphi)} \left[ 1 - \frac{N}{E_f A} \right] = \Delta u + \Delta s + \frac{\pi d \tau_f}{2 E_f A} (l - \Delta u - \Delta s)^2. \tag{9}$$

式(9)是含有参数  $\Delta u$  的  $N$  与  $w$  满足的方程,其中  $\varphi$  由式(4)给出,变量  $\Delta s$  由基体剥落条件确定.

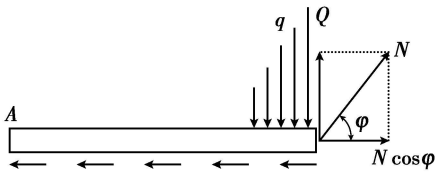


图 2 埋入段的载荷  
Fig. 2 Loading on embedded section

2 基体剥落条件

根据 Leung 和 Li<sup>[7]</sup>提出的方法,将  $AC$  段简化为弹性基础梁,基础的弹性支持系数是纤维断面垂直埋深  $h$  的函数(见图 1),记作  $k(h)$ ,  $k$  可以通过对图 1 所示剖面进行平面应变模型的有限元分析求得.当模型中基体与纤维接触区的最大拉应力达到基体强度极限时,基体发生剥落破坏,此时基体对单位长度纤维的支持力记作  $q_{cr}$ .图 3

给出  $q_{cr}$  与  $h$  的关系。由图 3 可见, 随着  $h$  的增加  $q_{cr}$  趋于定值, 即埋深增加时剥落力不变, 这是不合理的。因此文献[7]使用的接触区基体最大应力准则适用于小范围剥落, 即  $h \leq h_{cr}$ ,  $h_{cr}$  是接触区最大应力准则适用的最大埋深(见图 4), 可根据  $q_{cr}$  随  $h$  的增大趋于常数的点近似确定(见图 3)。当  $h > h_{cr}$  时需要考虑纤维上方基体的剪切破坏, 剥落准则可以采用“基体双面剪切准则”:

$$q_{cr} = q_{cr0} + 2(h - h_{cr}) \tau_{mb} \cdot \tag{10}$$

其中:  $q_{cr0}$  是按接触区基体最大应力准则确定的最大剥落力,  $\tau_{mb}$  是基体剪切强度。

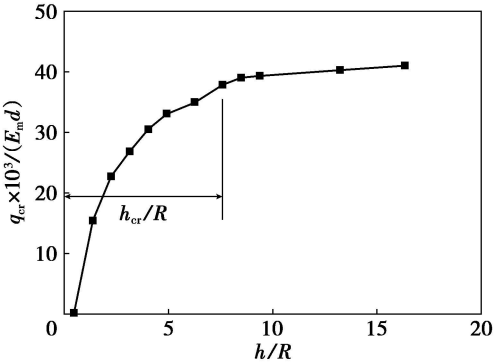


图 3 临界剥落力  
Fig.3 Critical spalling force

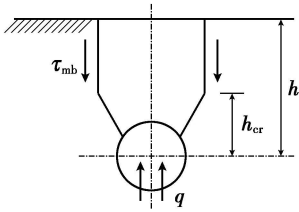


图 4 基体剥落准则  
Fig.4 Criterion of matrix spalling

利用 Winkler 弹性基础梁的理论解和  $q_{cr}$ , 可以近似地给出基体剥落时纤维埋入段拉出端的临界剪力与埋深  $h$  的关系

$$Q_{cr}(h) = \frac{q_{cr}}{2\beta}, \tag{11}$$

$$\beta = \left[ \frac{k}{4E_f I} \right]^{1/4}. \tag{12}$$

其中  $I$  是纤维的惯性矩。注意到  $C$  点处的垂直埋深  $h = \Delta s \cot \theta$ , 令

$$Q = N \sin \varphi = Q_{cr}(h), \tag{13}$$

从而得到  $\Delta s$  与  $N$  的补充方程, 与方程(9)联立, 则问题适定, 同时也表明拉出过程与剥落过程是耦合的, 两者相互影响。

3 计算结果

给定参数  $\Delta u \in (0, l)$  的一个变化序列, 对  $\Delta s$  增量迭代可求解非线性方程(9)和(13), 在不同拉

出长度  $\Delta u$  时, 得到对应的剥落长度  $\Delta s$ , 纤维的内力  $N$  和应力  $\sigma_f$ , 法向桥联力  $Z$  及张开位移  $w$ 。在单根纤维单侧拉出全过程中桥联力所做的功(即能量耗散)为

$$U = \int_0^{w_{max}} Z dw \cdot \tag{14}$$

计算中采用的几何参数及材料常数: 碳纤维直径  $d = 0.012\text{ mm}$ , 长度  $0.3 \sim 3.0\text{ mm}$ , 倾斜角  $\theta = 5^\circ \sim 85^\circ$ , 弹性模量  $E_f = 206\text{ GPa}$ , 拉伸强度  $\sigma_{fb} = 2700\text{ MPa}$ , 界面摩擦应力  $\tau_f = 1 \sim 5\text{ MPa}$ ; 环氧树脂基体:  $E_m = 3\text{ GPa}$ , 拉伸强度  $\sigma_{mb} = 90\text{ MPa}$ , 剪切强度  $\tau_{mb} = 70\text{ MPa}$ 。

图 5 给出不同倾斜角时短纤维在拉出过程法向桥联力与法向位移的关系, 在小倾斜角情况下拉出开始后桥联力迅速增大到最大值, 然后随位移增加单调下降到零; 而大倾斜角情况则明显不同:  $Z-w$  曲线从逐渐上升, 经过最大值后逐渐下降。由式(5)可知, 埋入长度减小使纤维拉力  $N$  降低, 但剥落过程中角度  $\varphi$  从小到大, 因而  $\varphi$  的变化使纤维拉力增大, 后者的影响随倾斜角的加大变得更为明显, 这就是曲线呈上述变化的原因。所以, 在一定情况下剥落使拉出消耗更多的能量。图 6 表示界面摩擦应力对拉出能量的影响, 可见当纤维较长时高摩擦应力可能使纤维拉断, 不利于

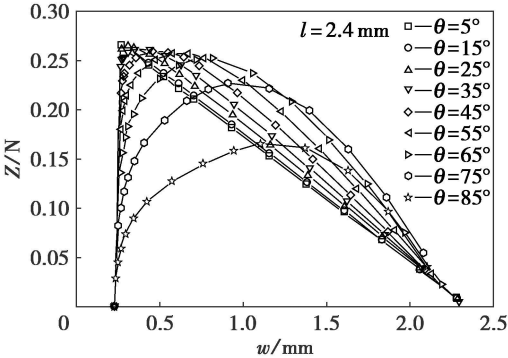


图 5 桥联力与拉出位移的关系  
Fig.5 Bridging force vs. pull-out displacement

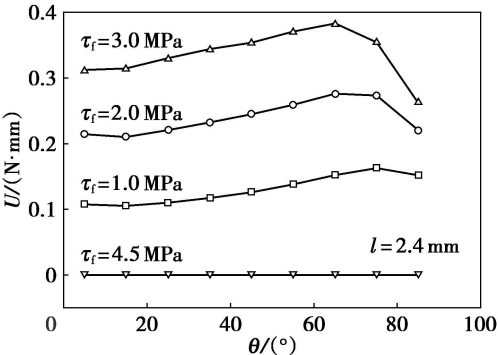


图 6 拉出能量与倾角及摩擦应力的关系  
Fig.6 Pull-out energy vs. inclined angle and friction stress

能量耗散; 低摩擦应力导致拉出力下降, 同样使拉出能减小。因此中等摩擦有利于桥联增韧, 摩擦应力的影响还与纤维长度和倾斜角有关, 大倾斜角时纤维拉力  $N$  的桥联力分量  $Z$  减小, 所以拉出能量下降; 此外较长的纤维和大倾斜角都可能因为拉出力过大使纤维断裂。图 7 和图 8 给出纤维长度对于拉出能量和最大拉出应力的影响, 结果表明在一定范围内 (不拉断) 增加短纤维长度, 可以提高拉出力, 增大拉出能量, 提高增韧效果。由图 7 可见拉出能量近似与纤维长度的平方成正比, 图 8 显示最大拉出应力受倾斜角度的影响很小, 与纤维长度大致为线性关系。

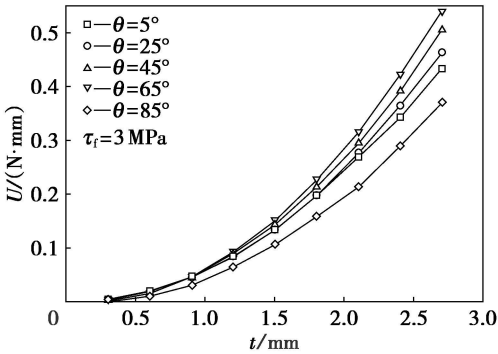


图 7 拉出能量与纤维长度的关系  
Fig. 7 Pull-out energy vs. fiber length

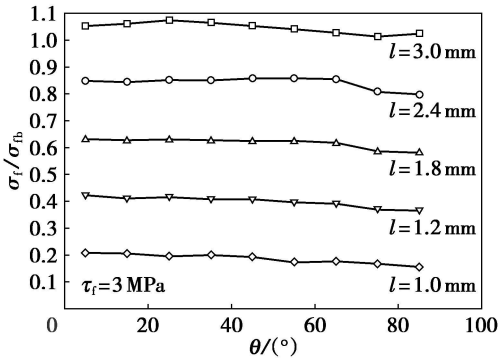


图 8 最大拉出应力与倾斜角的关系  
Fig. 8 Max. pull-out stress vs. inclined angles

## 4 结 论

计算结果表明, 在随机分布短纤维复合材料

的裂纹扩展过程中, 当倾斜角较大时剥落使拉出力增大, 下降推迟, 能耗增加; 影响纤维拉出、桥联和增韧的主要参数是纤维长度和界面脱粘后的摩擦应力, 选择适当参数可明显提高拉出能量。本文的简化计算方法可以比较方便地求出任意方向短纤维从基体拉出所消耗的能量, 用于估算桥联增韧。

### 参考文献:

[1] Marshall DB, Cox BN, Evans A G. The mechanics of matrix cracking in brittle matrix-fiber[J]. *Composites Acta Metall*, 1985, 33: 2013– 2021.

[2] Fu S Y, Yue C Y, Hu X, *et al.* Analyses of the micromechanics of stress transfer in single- and multi- fiber pull-out tests[J]. *Comp Sci Tech*, 2000, 60: 569– 579.

[3] Jiang X, Kong X. Micro-mechanical characteristics of fibre/matrix interfaces in composite materials[J]. *Comp Sci Tech*, 1999, 59: 635– 642.

[4] Cailleux E, Cutard T, Bernhart G. Pullout of steel fibres from a refractory castable experiment and modeling[J]. *Mechanics of Materials*, 2005, 37: 427– 445.

[5] Meo M, Achard F, Grassi M. Finite element modelling of bridging micro-mechanics in through-thickness reinforced composite laminates[J]. *Composite Structures*, 2005, 71: 383– 387.

[6] Li V C, Wang Y, Backer S. Effect of inclining angle, bundling and surface treatment on synthetic fibre pull-out from a cement matrix[J]. *Composites*, 1990, 21(2): 132– 140.

[7] Leung C K Y, Li V C. Effect of fiber inclination on crack bridging stress in brittle fiber reinforced brittle matrix composites[J]. *J Mech Phys Solids*, 1992, 40 (6): 1333– 1362.

[8] 崔松, 黄宝宗, 张凤鹏, 等. 具有大倾斜角的纤维桥联分析[J]. *东北大学学报: 自然科学版*, 2002, 23(5): 503– 506. (Cui Song, Huang Bao-zong, Zhang Feng-peng, *et al.* Analysis for bridging of fibers with large inclination angle[J]. *Journal of Northeastern University: Natural Science*, 2002, 23(5): 503– 506.)

[9] Huang B Z, Hu X Z, Liu J. Modelling of inter-laminar toughening from copped Kevlar fibers[J]. *Comp Sci Tech*, 2004, 64: 2165– 2175.