

文章编号: 1005-3026(2003)08-0743-04

一种信号数目估计的小波包分解优化算法

汪晋宽, 薛延波, 刘志刚, 刘福来

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 分析了入射信号数目估计的信息理论准则, 针对在低信噪比以及数据快照数目较小的情况下, Akaike 信息准则(AIC)和最小描述长度 MDL 都不能正确估计入射信号数目的问题, 提出了采用小波包分解方法对 MDL 准则进行优化的算法, 称之为 wpMDL 算法. 考虑子带分解具有预测偏差小和模式隔离等特点, 采用基于一维小波包分解的“伪二维”子带分解算法, 不仅有效地改善了 MDL 准则的估计性能, 而且计算量比二维分解降低了. 仿真结果验证了提案算法的有效性, 无论是对信噪比的变化还是数据快照数目的变化, wpMDL 算法都能正确地估计入射信号的数目.

关 键 词: 信号数目; Akaike 信息准则; 最小描述长度; 小波包; 子带分解

中图分类号: TP 911.7 **文献标识码:** A

近些年来, 高分辨率的信号到来角(DOA)估计方法已经成为一个热门领域^[1]. 尤其是以 MUSIC 算法^[2,3]为代表的特征结构方法的出现, 使得 DOA 估计对阵列布局的依赖性大大降低, 同时估计结果本身的分辨率也有很大提高. 高分辨率 DOA 估计的一个关键问题是窄带信号数目的确定, Akaike 信息准则(AIC)^[4]和最小描述长度(MDL)准则^[5,6]的提出, 从信息理论的角度初步解决了这个问题. 但是由于这些准则本身的内部局限性^[7], 在低信噪比(SNR)或者数据快照数目较小时, 往往不能正确估计出信号数目. 本文提出一种采用小波包分解理论改进信号数目估计的 MDL 准则的算法(wpMDL), 在不改变原有数据快照数目的基础上对 MDL 准则进行了优化, 有效改善了 MDL 准则在低信噪比和数据快照数目较少时的分辨性能.

1 信号模型

考虑各向同性的 M 元均匀线阵(ULA), 阵元间距为 d , 设有 D 个中心频率为 ω_0 的窄带信号源辐射到线阵上, 各信源的入射方向分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D$. 各个信号在基准点的复包络表示为

$s_k(t)$, 则第 i 个阵元端接收到的信号为

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^D s_k(t) e^{-j\omega_0(i-1)\sin\theta_k d/c} + n_i(t). \quad (1)$$

天线阵列受信矩阵表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_M(t)]^T$ 为受信向量; $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_D(t)]^T$ 为信号向量; $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \dots \ n_M(t)]^T$ 为噪声向量; $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_D)]$ 为阵列流型; $\mathbf{a}(\theta_k) = [1 \ v_k \ \dots \ v_k^{M-1}]^T$ 为导向向量; $v_k = \exp\{-j\omega_0 \sin\theta_k d/c\}$.

假设信号和噪声都是均值为 0 的平稳随机过程, $n_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, D$ 为与信号不相关且相互之间也不相关的高斯白噪声, 方差为 σ^2 , 则观测信号的自协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}. \quad (3)$$

式中, $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]$ 为信号的自协方差矩阵, 这里 $(\cdot)^H$ 表示 Hermite 转置(复共轭转置).

基于自协方差矩阵的特性, 其最小特征根数目即为信号的数目. 事实上, 在短数据采样时阵列自协方差矩阵并不一定完全具备这个特性, 即使

收稿日期: 2003-03-28

基金项目: 教育部科学技术研究重点项目(02085).

作者简介: 汪晋宽(1957-), 男, 辽宁沈阳人, 东北大学教授.

是在大数据采样的时候,对其进行特征分解也很难得到数目等于理论信号数目的最小特征值。

2 信号数目估计的信息理论准则

信息理论准则是指在接收信号的 N 个数据快照 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(N)\}$ 和概率密度的含参形式 $f(X|\hat{\Lambda})$ 给定的情况下,通过选择合适的模型,使得由该模型得到的数据最适合 X 。

AIC 和 MDL 准则对应的模型分别为

$$AIC = -2\log f(X|\hat{\Lambda}) + 2p, \quad (4)$$

$$MDL = -2\log f(X|\hat{\Lambda}) + \frac{1}{2}p\log N. \quad (5)$$

其中, $f(X|\hat{\Lambda})$ 表示 $x(1), x(2), \dots, x(N)$ 的联合概率密度, $\hat{\Lambda}$ 表示参数 Λ 的极大似然估计, p 为参数中可以自由调节的参数数目, N 为采样数。

对比式(4)和式(5),两个模型的第一项完全相同。模型中的第二项为偏差修正, AIC 准则没有综合考虑信号采样数目的影响,而 MDL 模型却在偏差修正中综合考虑了信号采样数目的影响。文献[7]证明了 MDL 准则具有一致性,而 AIC 准则不具备一致性。即在大采样数的情况下,使用 MDL 准则得到的估计值趋近于理论值,而使用 AIC 准则得到的估计值通常会大于理论信号数目。实际应用时, MDL 准则在低 SNR 下通常会得到小于理论信号数目的估计值^[8], 因此如何提高 MDL 准则的估计性能就成为重要的课题。

对于基于均匀线性阵列的受信信号模型,假设式(3)中 R_{ss} 的秩(信号数目)为 k , 则可以得到联合概率密度 $f(X|\hat{\Lambda})$ 的对数似然函数为

$$L(\hat{\Lambda}^{(k)}) = \log f(X|\hat{\Lambda}^{(k)}) = \log \left[\frac{(\prod_{i=k+1}^M \lambda_i)^N}{\sum_{i=k+1}^M \frac{1}{M-k} \lambda_i} \right]^{(M-k)N}. \quad (6)$$

对应的式(5)中的自由调节参数 $p = k(2M - k)$, 则 MDL 准则可以具体表示为

$$MDL(k) = -2\log \left[\frac{(\prod_{i=k+1}^M \lambda_i)^N}{\sum_{i=k+1}^M \frac{1}{M-k} \lambda_i} \right]^{(M-k)N} + \frac{1}{2}k(2M - k)\log N. \quad (7)$$

其中, $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 为 R_{xx} 的 M 个特征值。信号数目估计的 MDL 准则就可以转变为求取使得该准则最小的 k 值。

3 基于小波包分解的优化算法

小波包分解^[9]的实质是对原始全带信号的

子带分解,文献[10]给出了子带分解的优点:

- 1) 由子带分解得到的信号的所有最小预测偏差的总和小于由全带分解得到的预测偏差;
- 2) 由子带分解得到的信号的复合熵明显比全带分解得到的熵更靠近真实信号的熵;
- 3) 子带预测偏差谱比全带预测偏差谱相关性更低;
- 4) 子带分解还把不同子带中的不同模式隔离开来。这样不仅减少了不同模式之间的干扰,而且还提高了每个子带信号的分辨率。

对于一维的数据序列,采用小波包分解可以将其分解为“光滑”信号和“细节”信号,其光滑部分对应原始信号的低频或有用成分,而细节部分对应高频或干扰成分。一维小波包的分解过程其实就是将原始信号中的干扰信号滤出的过程。由于在信号数目估计时,选取天线阵列受信矩阵作为分析对象,所以一维的小波包分解不能适用于这种情况。可是如采用二维小波包分解,则要同时从水平、垂直和对角方向对二维信号进行分析,这样不仅会降低阵列接受信号的自由度,还增加分解的计算量。

针对上述问题,本文提出了基于一维小波包分解的“伪二维”子带分解算法,通过对多个一维分解的结果进行组合,解决了一维小波分解用于二维信号的问题。对二维信号进行分解之后,再结合信息理论中的 MDL 准则进行信号数目的估计的,称之为 wpMDL 算法。具体描述如下。

首先将由式(2)得到的 N 次数据快照组成矩阵

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_M]^T, \quad (8)$$

其中, $x_i = [x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(N)]$, $i = 1, 2, \dots, M$ 为阵元快照。再对每个阵元的快照采用 Mallat^[9]二进小波包分解算法进行单独的子带分解,分解后的第 j 层光滑信号和细节信号分别为

$$x_{j,n}^{(2l)} = \sum_m \tilde{h}_{m-2n} x_{j+1,m}^{(l)}, \quad (9)$$

$$x_{j,n}^{(2l+1)} = \sum_m \tilde{g}_{m-2n} x_{j+1,m}^{(l)}. \quad (10)$$

其中, $\{\tilde{h}_n; n \in Z\}$ 为低通滤波器系数, $\tilde{g}_n = (-1)^{n-1} \tilde{h}_{1-n}$, $n \in Z$ 为高通滤波器系数。

然后反复应用一维数据的小波包分解把每个阵元数据快照中的有用信号和干扰信号尽可能的分离,其中每次分解都可以将上层信号分解成两个子带,最后把所有的高频子带和低频子带分别进行组合,就可以实现对 X 的“伪二维”子带分解,表示为

$$X = X_1 \oplus X_2 \quad (11)$$

其中, $X_1 = [x_1^h, x_2^h, \dots, x_M^h]$ 为有用数据矩阵, $X_2 = [x_1^g, x_2^g, \dots, x_M^g]$ 为干扰数据矩阵, 且 x_i^h 和 x_i^g ($i = 1, 2, \dots, M$) 分别由式 (9) 和式 (10) 计算. 符号 \oplus 表示反向重构算子, 即通过“伪二维”小波包合成算法, 可以重构得到无失真矩阵 X .

经过“伪二维”小波包分解的预处理之后, 再对 X_1 应用 MDL 准则估计信号数目, 可以得到更为优化的估计效果. 很明显, 由于“伪二维”子带分解方法隔离了信号矩阵中的有用信号和干扰信号, 所以即使有一部分有用信号泄漏到矩阵 X_2 中, 也不会影响 wpMDL 准则的估计结果. 同时, 由于矩阵 X_1 和 X_2 只是对分解后数据的一种简单排列, 所以与二维小波包分解相比, 运算量约降低了 $O(N^4)$. 再者, 对于不同类型的阵列数据, 可以选择不同的小波母函数和尺度函数, 这使得 wpMDL 算法的灵活性有所增加.

4 仿真实验结果

考虑式 (1) 的信号模型, 选取具有 8 个均匀线性排列阵元的接收阵列, 阵元间隔为半个波长, 假设有两个到来角分别为 12 和 41 的信号入射到接

收阵列上, 取其 N 次快照, 子带分解器采用小波包实现, 滤波器选择具有 3 阶消失矩的 Daubechies 滤波器 D3^[11]. D3 滤波器的系数见表 1.

按照 Monte-Carlo 实验的方法进行仿真. 定义信噪比 SNR 为 $10\log 1/\sigma^2$, 可以得到图 1a ~ 图 1d 的仿真结果. 图 1a 和图 1b 为快照数目 $N = 200$ 恒定, 采用 MDL 和 wpMDL 得到的仿真结果; 图 1c 和图 1d 为 $SNR = 10$ dB 恒定, 采用这两种准则得到的仿真结果, 其中图 1 中箭头标明了每个虚线框的放大图. 如图 1a, 在 SNR 非常小的情况下, 使用 MDL 准则判断的信号数目估计值小于理论值, 这是由于噪声影响了 MDL 准则的判断效果; 图 1b 为采用 wpMDL 准则之后的信息理论准则和信号数目关系图, 结果表明 wpMDL 优化了 MDL 的性能, 即使在 SNR 很低的情况下 wpMDL 仍能正确估计到来信号的数目; 图 1c 为 $SNR = 10$ dB 固定而数据快照数目变化时的仿真结果, 由于式 (7) 中 MDL 准则的补偿项受快照数目的影响较大, 所以对于数据快照数目较小 ($N = 100$) 的受信矩阵, MDL 不一定能正确判断其信号数目; 而图 1d 为在与图 1c 相同的条件下, 采用 wpMDL 准则得到的仿真结果, 由其放大部分可明显得出, wpMDL 改进了 MDL 在数据快照数目

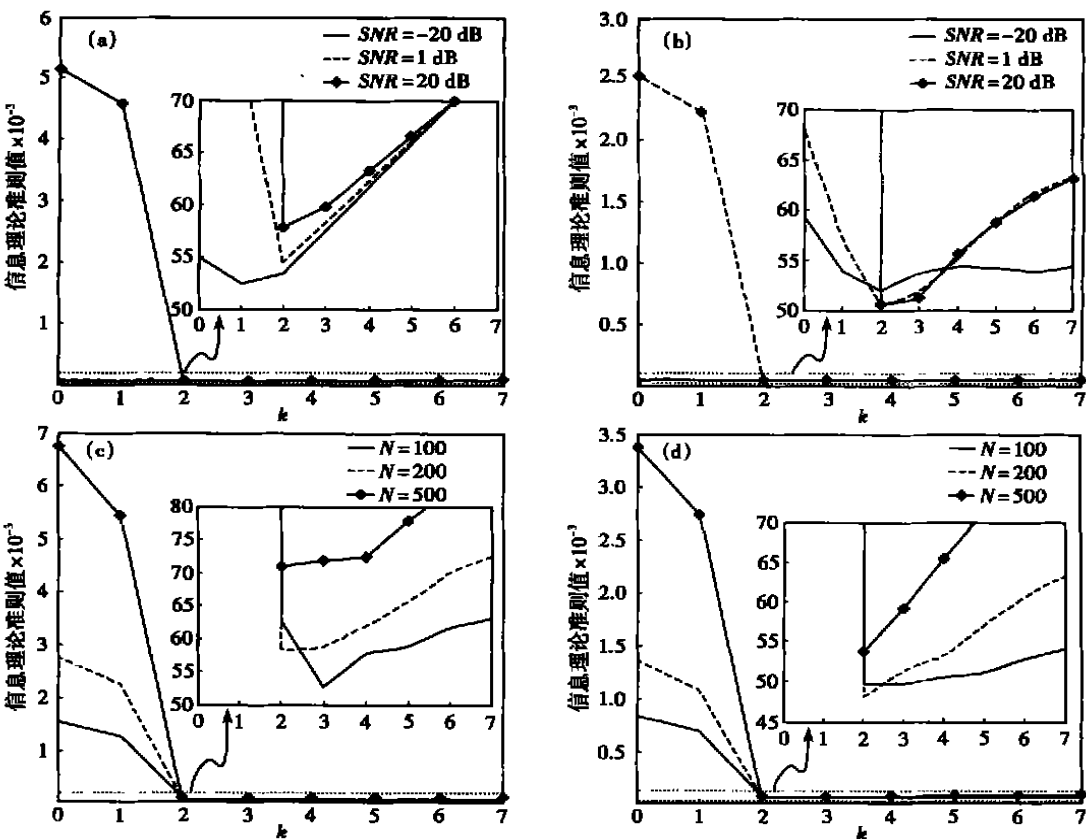


图 1 信息理论准则值与信号数目 k 的关系

Fig. 1 Information theoretic criteria terms versus the number of signals

(a) —MDL, $N = 200$; (b) —wpMDL, $N = 200$; (c) —MDL, $SNR = 10$ dB; (d) —wpMDL, $SNR = 10$ dB.

较小时不能正确估计信号数目的性能 因此,无论快照数目不变而信噪比变化,还是信噪比不变而快照数目变化的情况,wpMDL 算法都优于 MDL 算法.

表 1 D3 小波系数表
Table 1 Coefficients of D3 wavelet

n	$h[n]$	n	$h[n]$
0	0.332 670 552 950	3	- 0.135 011 020 010
1	0.806 891 509 311	4	- 0.085 441 273 882
2	0.459 877 502 188	5	0.035 226 291 882

5 结 论

本文提出了一种采用小波包分解对信号数目估计的信息理论准则进行优化的算法(wpMDL),即利用一维子带分解的优点,对受信矩阵进行“伪二维”的子带分解,该算法具有下列特点:

(1) 实现了有用数据和干扰数据的隔离,优化了信号数目的估计算法;

(2) 由于 wpMDL 只是对多个一维分解结果进行适当的组合,所以其运算量较二维分解而言降低了;

(3) 小波母函数和尺度函数选择的高度自由度使得 wpMDL 适用于不同类型阵列数据;

(4) 即使有一部分有用数据泄漏,只要保证了干扰数据的正确隔离,都能对 MDL 算法进行优化.

仿真结果表明,wpMDL 改进了 MDL 准则在

SNR 较低时信号数目估计值小于理论数目的缺点,同时在数据快照数目较少时也能正确估计到来信号的数目.

参考文献:

- [1] 汪晋宽,薛延波,刘志刚,等. DOA 估计方法的探讨[J]. 控制与决策, 2003,18:57 - 59.
(Wang J K, Xue Y B, Liu Z G, et al. Study on DOA estimation methods[J]. *Control and Decision*, 2003,18:57 - 59.)
- [2] Godara L C. Application of antenna arrays to mobile communications, Part : Beamforming and direction-of-arrival considerations[J]. *Proc of the IEEE*, 1997,85(8): 1195 - 1245.
- [3] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Trans on Antennas Propagat*, 1986, 34(3):276 - 280.
- [4] Akaike H. A new look at the statistical model identification[J]. *IEEE Trans on Automat Contr*, 1974,19:716 - 723.
- [5] Rissanen J. Modeling by shortest data description[J]. *Automatica*, 1978,14:465 - 471.
- [6] Schwartz G. Estimating the dimension of a model[J]. *Ann Stat*, 1978,6:461 - 464.
- [7] Wax M, Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria[J]. *IEEE Trans on Acous Speec and Signa Proce*, 1985,33(2):387 - 392.
- [8] Wong K M, Zhang Q T, Reilly J P, et al. On information theoretic criteria for determining the number of signals in high resolution array processing[J]. *IEEE Trans on Acous Speec and Signa Proce*, 1990,38(11):1959 - 1971.
- [9] Mallat S. A wavelet tour of signal processing (second edition)[M]. Academic Press, 1999.322 - 336.
- [10] Rao S, Pearlman W A. Analysis of linear prediction, coding, and spectral estimation from subbands[J]. *IEEE Trans on Infor Theor*, 1996,42(4):1160 - 1178.
- [11] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. *Commun Pure Appl Math*, 1988,XLI:969 - 996.

Optimizing Algorithm in Determining the Number of Signals Using Wavelet Packet Decomposition

WANG Jin-kuan, XUE Yan-bo, LIU Zhi-gang, LIU Fu-lai

(School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: XUE Yan-bo, E-mail: yanboxue@yahoo.com)

Abstract: Detection of number of signals by information theoretic criteria is given. In the occasions of low signal-to-noise ratio (SNR) and large snapshots, incorrect estimate of signal number is often yielded with both Akaike Information Criteria (AIC) and Minimum Description Length (MDL). A wavelet packet decomposition (WPD) based algorithm is proposed to optimize MDL, which is addressed wpMDL. With the features of minimum prediction error and mode isolation, pseudo 2-D subband decomposition algorithm based on one-dimension (1-D) wavelet packet decomposition is introduced to not only improve the estimate performance but also save the computation by $O(N^4)$ compared with 2-D WPD.

Key words: number of signals; Akaike information criteria; minimum description length; wavelet packet; subband decomposition

(Received March 28, 2003)