第25卷第11期 东北大学学报(自然科学版) Vol. 25, No. 11
2004年11月 Journal of Northeastern University (Natural Science) Nov. 2004

文章编号: 1005-3026(2004)11-1038-04

一个计算无圈有向网络可靠度的有效算法

孙艳蕊, 张祥德
(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 研究了无圈有向网络结点集合的两部分划分(点化分)与极小割集之间的关系. 通过对网络结点集合的满足一定条件的两部分点划分,直接得到了网络的极小割集. 根据点划分对应结点集合之间的包含关系,提出并证明了网络可靠度的容斥原理表达式中项的几个相消原则;在此基础上建立了一个基于割集的计算无圈有向网络可靠度的容斥原理公式及算法,算法直接给出了容斥原理公式中的所有不相消项;最后,通过例子说明了算法的有效性.

关 键 词: 点划分;极小割集;容斥原理;网络可靠度;算法
中图分类号: TP 302.7 **文献标识码**: A

计算机网络每时每刻都在传输着大量的信息,要使用户、设备、系统等之间的信息准确、及时无误地传输,就要考虑网络的可靠性. 而可靠度是可靠性中的一个重要指标. 所谓系统可靠度是指系统在规定条件下和规定时间内,完成规定功能的概率,反映了基础网络拓扑结构支持网络正常运行的能力,它是网络设计和运行的一个重要参数. 如何分析和计算网络可靠度是计算机通信科学中的一个重要课题. 计算可靠度一般有三种基本方法[1~9]: ①容斥原理方法; ②不交积和方法; ③因子定理方法. 两终端可靠度的容斥原理方法就是找出所有的道路或割集,然后代入容斥原理公式中求可靠度. 如果直接应用容斥原理计算,表达式中的项数随割集或道路的增加呈指数增长,计算量很大. 但其中会有很多相互抵消的项. 因此,人们一直在寻求找出容斥原理公式中的相消项或不消项的方法. Satyanarayana 等人在文献[2]中给出了一个算法,算法直接给出对应于道路集合的容斥原理公式中的不消项,是一个有效的算法. Buzacott 利用点划分给出了一个容斥原理算法公式[3],并且给出了一些相消规则,但公式中仍会产生一些可以相互抵消的项. 本文首先提出了一些相消原则,然后给出了一个公式及算法,该公式中的项恰好和容斥原理公式中的所有不相消项对应.

1 记号、定义与假设

1.1 记号

$G(N, E)$:结点集为 N,边集为 E 的有向网络;

$R(s, t)$:从网络源点 s 到汇点 t 能够通信的概率,即 s, t 可靠度;

$N_i, \overline{N_i}$: $N_i \subset N$ 且 $s \in N_i$, $\overline{N_i} = N - N_i$ 且 $t \in \overline{N_i}$;

$(N_i, \overline{N_i})$:用点划分求得的网络的极小割,也记为 C_i;

C_iC_j: C_i 和 C_j 中的所有弧,重复的仅写一次(称为 C_i 与 C_j 的乘积);

$\sigma(N_i)$: $\{N_j(C_i) \mid N_j \supset N_i$,按 $|N_j|$ 递增的顺序排列,若 $|N_j| = |N_j'|$,则按字典序$\}$;

r_i: $\sigma(N_i)$ 中含有割集的数,即元素的个数;

M_{ij}:表示 $\sigma(N_i)$ 中含的第 j 个元素;

U_i:网络 G 中 i 个割集的并;

ε_i:如果 U_i 中含有割集的数为偶数,取值 -1;否则取值 $+1$;

$R(N_i, N_j) \neq 0$:表示 N_i 中的每个结点与 N_j 中的每个结点都连通;

$R(N_i, N_j) = 0$:表示 N_i 中的每个结点与 N_j 中的每个结点都不连通;

$N^+(v_i)$:表示集合$\{v_j \mid$有向边$(v_i, v_j) \in E\}$.

收稿日期: 2004-03-17
基金项目: 国家博士后科学基金资助项目(2003033372);辽宁省自然科学基金资助项目.
作者简介: 孙艳蕊(1965-),女,河北丰南人,东北大学副教授; 张祥德(1963-),男,山东昌乐人,东北大学教授.

1.2　定义

点划分求极小割[10]：设 N_i，$\overline{N_i}$ 为网络 $G(N,E)$ 的结点集 N 的一个点划分．如果①$s\in N_i$，$t\in\overline{N_i}$，$R(s,N_i)\neq 0$，$R(\overline{N_i},t)\neq 0$；②不存在 N 的点划分 N_j，$\overline{N_j}$ 使 $(N_j,\overline{N_j})\subseteq(N_i,\overline{N_i})$，则 $(N_i,\overline{N_i})$ 为 G 的一个极小割．

1.3　假设

整个网络及每条边只有两个状态(正常工作或失效)；网络的点总是正常工作，整个网络及每条边的工作状态在统计上是相互独立的．

2　预备知识

设 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是有向网络的 m 个极小割，利用容斥原理公式得 s,t 两点能通信的概率，即 s,t 两终端可靠度

$$R(s,t)=1-Q(s,t),$$

其中，

$$Q(s,t)=\Pr(C_1\cup\cdots\cup C_m)=\sum_{1\leq i\leq m}\Pr(C_i)-\sum_{1\leq i<j\leq m}\Pr(C_iC_j)+\cdots+(-1)^{m-1}\times\Pr(C_1C_2\cdots C_m).\tag{1}$$

在 $Q(s,t)$ 的表达式中共有 2^m-1 项，对于不同的 i,j，可能有 $U_i=U_j$，$\varepsilon_i=-\varepsilon_j$，这样 $\varepsilon_i\Pr(U_i)$ 与 $\varepsilon_j\Pr(U_j)$ 相抵消．本文算法不产生这样的项，下面给出一些引理．

引理 1　设 $C_i=(N_i,\overline{N_i})$，$C_j=(N_j,\overline{N_j})$ 为网络的两个极小割，N_i，N_j 不能比较，则在容斥原理公式中同时包含 C_i 和 C_j 的项被消掉[3]．

引理 2　设 $C_i=(N_i,\overline{N_i})$，$i=1,2,3$，且 $N_1\subset N_2\subset N_3$，则 $C_1C_3=C_1C_2C_3$ 的充要条件是 $R(N_2-N_1,N_3-N_2)=0$．

证明　充分性　只要证明 $C_2\subset C_1C_3$ 即可．设 $e=uv$，是 C_2 的任意一条边．

①如果 $u\in N_1$，则 $e\in C_1$，因而 $e\in C_1C_3$，所以 $C_2\subset C_1C_3$．

②如果 $u\in N_2-N_1$，则由已知，$v\notin N_3-N_2$，而 $v\in\overline{N_3}$，所以 $e\in C_3$，从而 $C_2\subset C_1C_3$．

综合①，②，$C_1C_3=C_1C_2C_3$．

必要性是显然的．

推论 1　设 $N_1\subset N_2\subset N_3$，$R(N_2-N_1,N_3-N_2)=0$，，如果 $N_i\subset N_1$，或 $N_1\subset N_i\subset N_3$，或 $N_3\subset N_i$，则 $C_1C_2C_3C_i=C_1C_3\ C_i$．

引理 3　设 $G(N,E)$ 是一个 $k(k\geq 1)$ 连通的无圈有向图，$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ $(n\geq k)$ 是 G 的一个极小点割，N_1，N_1 是两个结点集合，$s\in N_1$，$t\in N_1{}'$，且 $R(s,N_1)\neq 0$，$R(N_1{}',t)\neq 0$，同时 $N_1\cup V\cup N_1{}'=N$，记 $N_3=N_1\cup V$；对任意的 $v_i(1\leq i\leq n)$，记 $N_2=N_1\cup\{v_i\}$，则 $C_1=(N_1,\overline{N_1})$，$C_2=(N_2,\overline{N_2})$，$C_3=(N_3,\overline{N_3})$ 都是 G 的极小割集(证明略)．

推论 2　在引理 3 的条件下，利用容斥原理计算可靠度时，同时包含 C_1 和 C_3 的项被消掉．

证明　因为 G 是一个无圈有向图，因此一定存在一个结点，不妨设为 v_1，使 $N^+(v_1)\cap\{v_2,\cdots,v_n\}=\varnothing$(如果这样的点 v_1 不存在，则至少存在一个以$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$中的点为结点的一个有向圈，与 G 是一个无圈有向图矛盾)．记 $N_2=N_1\cup\{v_1\}$，则根据引理 3，$C_1=(N_1,\overline{N}_1)$，$C_2=(N_2,\overline{N}_2)$，$C_3=(N_3,\overline{N}_3)$ 是 G 的极小割．又 $N_2-N_1=\{v_1\}$，$N_3-N_2=\{v_2,\cdots,v_n\}$，于是 $R(N_2-N_1,N_3-N_2)=0$，根据引理 2 及推论 1，在利用容斥原理计算可靠度时，同时包含 C_1 和 C_3 的项被消掉．

推论 3　设 $N_1\subset N_2\subset N_3$，$N_1{}'\subset N_3\subset N_3{}'$，$N_3-N_1{}'=N_2-N_1$，且 $C_1C_3=C_1C_2C_3$，$C_1{}'C_3{}'=C_1{}'C_3C_3{}'$，则 $C_1C_3{}'=C_1C_2C_3{}'$．

证明　$R(N_2-N_1,N_3{}'-N_2)=R(N_2-N_1,N_3{}'-N_3+N_3-N_2)=R(N_2-N_1,N_3{}'-N_3)+R(N_2-N_1,N_3-N_2)$．

因为 $C_1C_3=C_1C_2C_3$，$C_1{}'C_3{}'=C_1{}'C_3C_3{}'$，由引理 2，$R(N_2-N_1,N_3-N_2)=0$，$R(N_3-N_1{}',N_3{}'-N_3)=0$．又已知 $N_3-N_1{}'=N_2-N_1$，所以 $R(N_2-N_1,N_3{}'-N_3)=0$，从而 $R(N_2-N_1,N_3{}'-N_2)=0$．再根据引理 2，$C_1C_3{}'=C_1C_2C_3{}'$．

推论 4　设 $N_1\subset N_2\subset N_3$，$N_2\subset N_2{}'\subset N_3{}'$，$N_3-N_2=N_3{}'-N_2{}'$，且 $C_1C_3=C_1C_2C_3$，$C_2C_3{}'=C_2C_2{}'C_3{}'$，则 $C_1C_3{}'=C_1C_2{}'C_3{}'$．

3　公式、算法及例子

由前面引理及其推论得到如下公式和算法：

$$R(s,t)=1-\Pr\left\{\sum_{1\leq i_1\leq m}C_{i_1}\left(1-\sum_{N_{i_1i_2}\in\sigma(N_{i_1})}C_{i_1i_2}\times\left(1-\sum_{N_{i_1i_2i_3}\in\sigma_{N_{i_1}}(N_{i_1i_2})}C_{i_1i_2i_3}(1-\cdots)\right)\right)\right\}=$$

$$1-\left\{\sum_{1\leq i_1\leq m}\Pr(C_{i_1})-\sum_{1\leq i_1\leq m-1}\sum_{N_{i_1i_2}\in\sigma(N_{i_1})}\Pr(C_{i_1}C_{i_1i_2})+\sum_{1\leq i_1\leq m-1}\sum_{N_{i_1i_2}\in\sigma(N_{i_1})}\times\sum_{N_{i_1i_2i_3}\in\sigma_{i_1}(N_{i_1i_2})}\Pr(C_{i_1}C_{i_1i_2}C_{i_1i_2i_3})-\cdots\right\},\tag{2}$$

其中,$\sigma(N_{i_1})$,$\sigma_{N_{i_1}}(N_{i_1i_2})$,…由下面的算法给出:

算法

第一步　用点划分求出极小割:$C_i=(N_i,\overline{N_i})(i=1,2,\cdots,m)$,这里$|N_1|\le|N_2|\le\cdots\le|N_m|$,有时用 N_i 表示割集C_i.

第二步　求 $\sigma(N_i)$,$i=1,2,\cdots,m$.

第三步　求出所有的极小点割 $V_i(V_i=\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_{ni}}\})$,将 N 分解成三部分:N_{i_1},V_i,N_{i_1}',使 $N_{i_1}\cup V_i\cup N_{i_1}'=N$,$s\in N_{i_1}$,$t\in N_{i_1}'$,$R(s,N_{i_1})\neq 0$,$R(N_{i_1}',t)\neq 0$,$i=1,\cdots,n(n\le m)$.

第四步　求公式(2)中的 $\sigma(N_{i_1})$,$\sigma_{N_{i_1}}(N_{i_1i_2})$,…

for $i=1$ to n
　找 v_{ij},使 $N^+(v_{ij})\cap(V_i-\{v_{ij}\})=\varnothing$
　$N_{i_2}\leftarrow N_{i_1}\cup\{v_{ij}\}$,$N_{i_3}\leftarrow N_{i_1}\cup V_i$;
　$\sigma(N_{i_1})\leftarrow\sigma(N_{i_1})-\{N_{i_3}\}$
　next i
for $i=1$ to $n-1$
　for $j=i+1$ to n
　　if $N_{j_2}=N_{i_3}$ then
　　　if $N_{i_2}-N_{i_1}=N_{j_2}-N_{j_1}$ then
　　　　$\sigma(N_{i_1})\leftarrow\sigma(N_{i_1})-\{N_{j_3}\}$; $K\leftarrow K\cup(i,j)$
　　　end if
　　else if $N_{i_2}=N_{j_3}$ then
　　　if $N_{i_2}-N_{i_1}=N_{j_2}-N_{j_1}$ then
　　　　$\sigma(N_{j_1})\leftarrow\sigma(N_{j_1})-\{N_{i_3}\}$; $K\leftarrow K\cup(j,i)$
　　　end if
　　end if
　　if $N_{i_2}=N_{j_1}$ then
　　　if $N_{i_3}-N_{i_2}=N_{j_3}-N_{j_2}$ then
　　　　$\sigma(N_{i_1})\leftarrow\sigma(N_{i_1})-\{N_{j_3}\}$:$L\leftarrow L\cup(i,j)$
　　　end if
　　else if $N_{j_2}=N_{i_1}$ then
　　　if $N_{i_3}-N_{i_2}=N_{j_3}-N_{j_2}$ then
　　　　$\sigma(N_{j_1})\leftarrow\sigma(N_{j_1})-\{N_{i_3}\}$; $L\leftarrow L\cup(j,i)$
　　　end if
　　end if
　next j
next i
for $i=1$ to m
　for $j=1$ to r_i　$\sigma_{N_i(M_{ij})}\leftarrow\sigma(M_{ij})$　next j
next i
for $i=1$ to n　$\sigma_{N_{i_1}}(N_{i_2})\leftarrow\sigma_{N_{i_1}}(N_{i_2})-\{N_{i_3}\}$
next i

对每个$(i,j)\in K$,$\sigma_{N_{i_1}}(N_{i_2})\leftarrow\sigma_{N_{i_1}}(N_{i_2})-\{N_{j_3}\}$

对每个$(i,j)\in L$,$\sigma_{N_{i_1}}(N_{j_2})\leftarrow\sigma_{N_{i_1}}(N_{j_2})-\{N_{j_3}\}$

第五步　结束.

例　求图1中网络 G_1 的 s,t 可靠度.

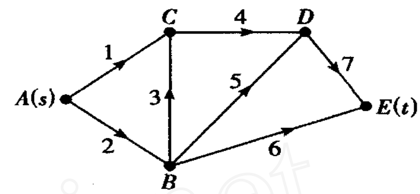

图1　网络 G_1
Fig.1　Network G_1

算法的运行结果如下:

网络 G_1 共有6个极小割:$C_1=A(12)$,$C_2=AB(1356)$,$C_3=AC(24)$,$C_4=ABC(456)$,$C_5=ACD(27)$,$C_6=ABCD(67)$.

公式(2)中的 $\sigma(N_{i_1})$,$\sigma_{N_{i_1}}(N_{i_1i_2})$,…,分别为:

$\sigma(A)=\{AB,AC,ACD\}$,$\sigma_A(AB)=\{ABC,ABCD\}$,$\sigma_A(AC)=\{ACD\}$,$\sigma_A(ABD)=\varnothing$;

$\sigma(AB)=\{ABC,ABCD\}$,$\sigma_{AB}(ABC)=\{ABCD\}$;

$\sigma(AC)=\{ABC,ACD\}$,$\sigma_{AC}(ABC)=\{ABCD\}$,$\sigma_{AC}(ACD)=\varnothing$;

$\sigma(ABC)=\{ABCD\}$;$\sigma(ACD)=\{ABCD\}$;$\sigma(ABCD)=\varnothing$.

将这些集合代入式(2)并设第 i 条边失效的概率为 $q_i(i=1,2,\cdots,7)$,则得网络 G_1 的 s,t 可靠度

$$\begin{aligned}R(s,t)=1-[&q_1q_2(1-q_3q_5q_6(1-q_4(1-q_7)-q_7)-q_4(1-q_7)-q_7)+\\&q_1q_3q_5q_6(1-q_4(1-q_7)-q_7)+\\&q_2q_4(1-q_5q_6)(1-q_7)-q_7)+\\&q_4q_5q_6(1-q_7)+q_2q_7(1-q_6)+\\&q_6q_7].\end{aligned}$$

直接利用容斥原理计算,表达式中将出现2^6-1项,而其中有42项相互抵消.对于较大网络这一结果更明显.例如,图2中网络 G_2 的两终端可靠度的容斥原理公式中出现2^9-1项,其中有446项相互抵消.可以证明利用本文算法公式计算 s,t 可靠度时,容斥原理公式中的相消项不再产生.

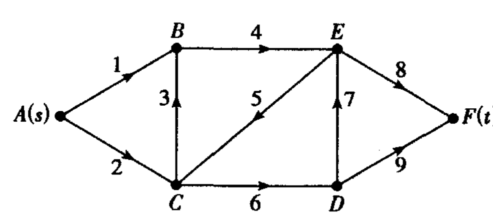

图2　网络 G_2
Fig.2　Network G_2

4 结　　语

直接利用容斥原理计算网络可靠度时,表达式中会出现很多相互抵消的项.因此,人们一直在寻求如何得到公式中的相消项或不消项的方法.本文从割集出发,对网络两终端可靠度的容斥原理算法进行了研究,给出了一个计算可靠度的公式及算法.算法直接产生容斥原理公式中的非相消项.由于不出现相消项,因此无论是算法的时间复杂度还是空间复杂度都要大大降低,所以本文算法是计算网络可靠度的一个有效的容斥原理算法.

参考文献:

[1] Locks M O. Recent development in computing of system reliability[J]. *IEEE Transcation on Reliability*, 1985,5(12):425 - 436.

[2] Satyanarayana A, Prabhakar A. New topological formula and rapid algorithm for reliability analysis of complex networks[J]. *IEEE Transcation on Reliability*, 1978,27(6):82 - 100.

[3] Buzacott J A. Node partition formula for directed graph reliability[J]. *Networks*, 1987,17(4):227 - 240.

[4] Rai S, Eeraraghavan M V, Trivedi K S. A survey of efficient reliability computation using disjoint products approach[J]. *Networks*, 1995,25(3):146 - 163.

[5] Luo T, Trivedi K S. An improved algorithm for coherent-system reliability[J]. *IEEE Transcation on Reliability*, 1998,47(1):73 - 78.

[6] Colbourn C J. *The combinatorics of network reliability*[M]. New York: Oxford University Press, 1987.1 - 40.

[7] Yeh W C. An evaluation of the multi-state node networks reliability using the traditional binary-state networks reliability algorithm[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2003,81(1):1 - 7.

[8] 孙艳蕊,张祥德.一种计算具有不可靠结点分布式计算网络可靠性的算法[J].通信学报, 2002,23(9):22 - 28.
(Sun Y R, Zhang X D. An algorithm for reliability evaluating of distributed computing networks with imperfect nodes[J]. *Journal of China Institute of Communications*, 2002,23(9):22 - 28.)

[9] 刘普寅,张维明.通信网络可靠性研究中的数学问题[J].通信学报, 2000,21(10):50 - 57.
(Liu P Y, Zhang W M. Mathematical problems in research on reliability of communication networks[J]. *Journal of China Institute of Communications*, 2000,21(10):50 - 57.)

[10] 孙艳蕊,张祥德.求网络极小割集的一个新算法[J].东北大学学报(自然科学版), 2001,22(5):576 - 579.
(Sun Y R, Zhang X D. A new algorithm for generating all minimal cuts in a graph[J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2001,22(5):576 - 579.)

Efficient Algorithm for Computing Reliability of Acyclic Directed Networks

SUN Yan-rui, ZHANG Xiang-de
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: SUN Yan-rui, associate professor, E-mail: yanruisun @yahoo.com.cn)

Abstract: The relation between node partition and cut set of an acyclic directed network was studied. The minimal cutsets can be obtained directly by partitioning the node set of network into two parts satisfying certain conditions. By the inclusion of the sets corresponding to the node portition, several cancellation rules for the terms in the expression of inclusion-exclusion principle were presented and proved to the network reliability. Using these rules, a formula expressing inclusion-exclusion principle and an algorithm for evaluating the reliability of acyclic directed networks were presented. The algorithm will give directly all the noncancellable terms in the inclusion-exclusion formula, of which the validity was illustrated by examples.

Key words: node partition; minimal cutset; inclusion-exclusion principle; network reliability; algorithm

(Received March 17, 2004)